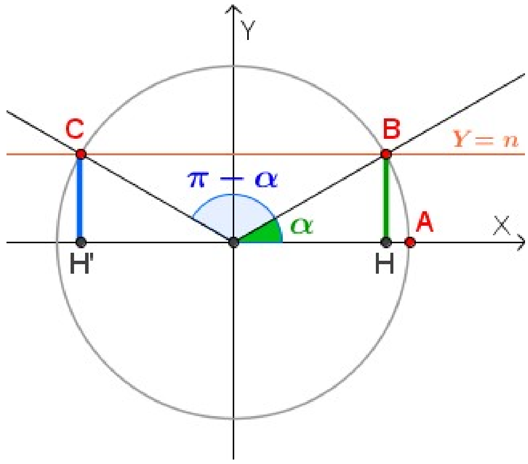
Equazioni goniometriche

Teoria ed esempi

Equazioni goniometriche elementari (I tipo)

Un'equazione goniometrica elementare nella funzione seno è un'equazione del tipo:

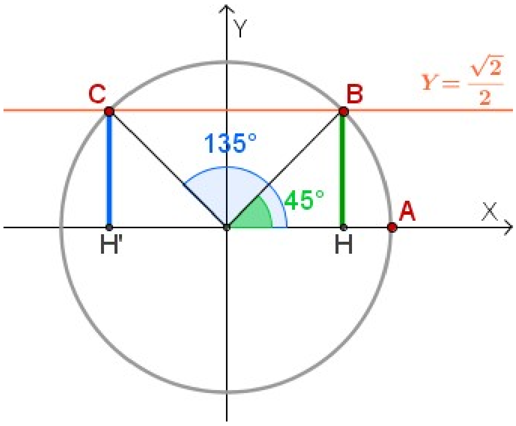
$$\boxed{\boldsymbol{\sin x = n}}$$

Soluzione	Rappresentazione grafica
La retta di equazione $Y = n$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli: α e $\pi - \alpha$. Le soluzioni dell'equazione $\sin x = n$ con $-1 \le n \le +1$ sono: $\boldsymbol{x = \alpha + 2k\,\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = (\pi - \alpha) + 2k\,\pi}$	
Si conviene di considerare come angolo soluzione α quello appartenente all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	

Esempio 1

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

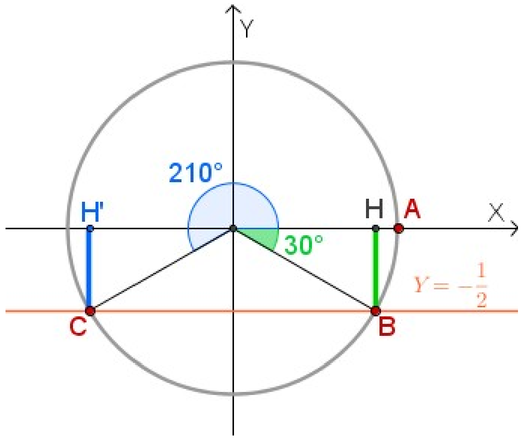
Soluzione

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ *Ossia* $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$

Esempio 2

$$\boldsymbol{\sin x = -\frac{1}{2}}$$

Soluzione

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ *è* $\alpha = -\frac{\pi}{6} = -30°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \left[\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2k\pi$ *Ossia* $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi}$

Esempio 3

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{3}{2}}$$

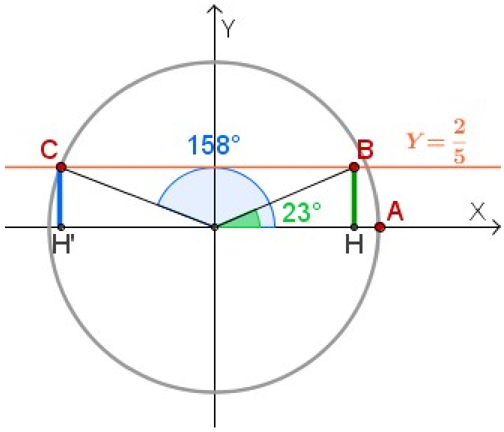
Soluzione

L'equazione è impossibile *perché* $\frac{3}{2} \notin [-1,1]$.

Esempio 4

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{2}{5}}$$

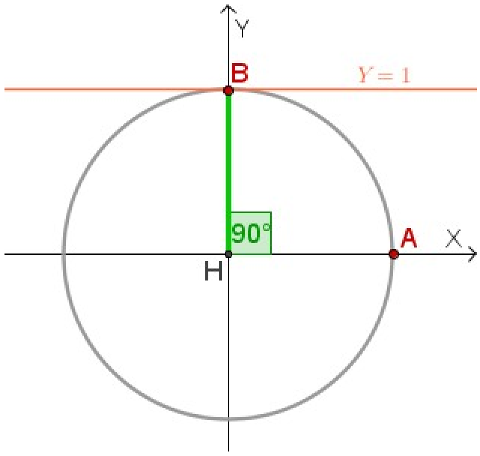
Soluzione

Il valore $\frac{2}{5}$ *di* $\sin x$ *non è un valore noto.* *In questo caso per trovare l'angolo* α *si utilizza la funzione* $\arcsin n$. *L'angolo* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ *è* $\alpha = \arcsin\frac{2}{5} \cong 0{,}41\ rad \cong 23{,}57°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \arcsin\frac{2}{5} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \left(\pi - \arcsin\frac{2}{5}\right) + 2k\pi}$
Utilizzando una calcolatrice scientifica è possibile ricavare un valore approssimato di $\arcsin\frac{2}{5}$.	$\boldsymbol{x \cong 0,41 + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x \cong 2,73 + 2k\pi}$

Esempio 5

$$\boldsymbol{\sin x = 1}$$

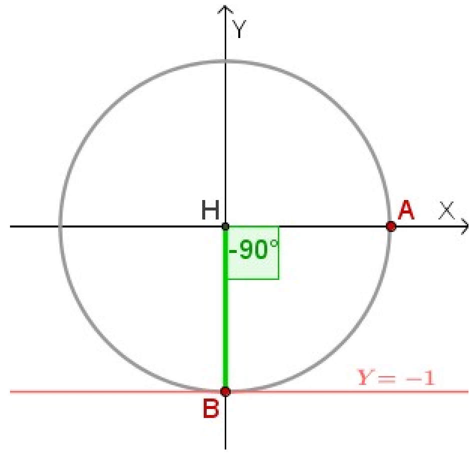
Soluzione

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin\alpha = 1$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

Esempio 6

$\boldsymbol{sin\, x = -1}$

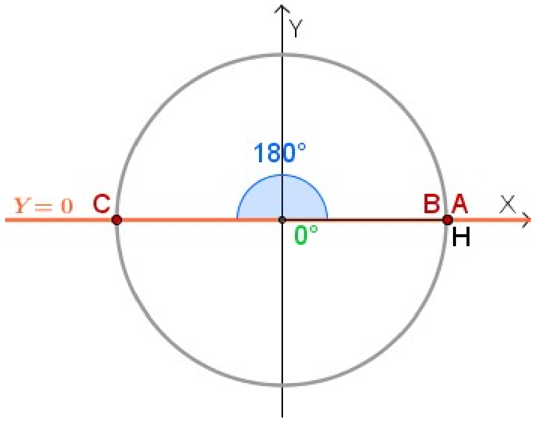
<u>*Soluzione*</u>

$L'angolo\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $tale\ che \quad sin\ \alpha = -1 \quad è$ $\alpha = -\frac{\pi}{2} = -90°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

Esempio 7

$\boldsymbol{sin\, x = 0}$

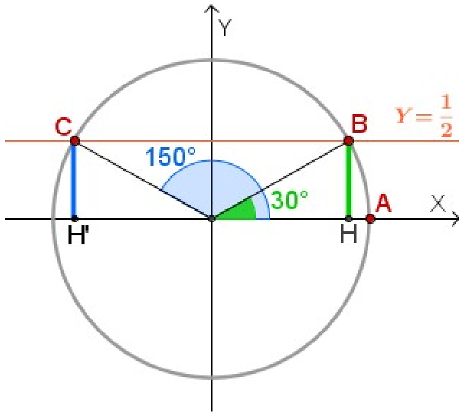
<u>*Soluzione*</u>

$L'angolo\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $tale\ che \quad sin\ \alpha = -1 \quad è$ $\alpha = 0$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$x = 0 + 2k\pi \quad \vee \quad x = [\pi - 0] + 2k\pi$ *Ossia* $\boldsymbol{x = k\pi}$

Esempio 8

$$2sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$$

<u>Soluzione</u>

Trasformiamo l'equazione in forma canonica	$sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
$L'angolo\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $tale\ che\quad sin\ \alpha=\frac{1}{2}\quad è$ $\alpha=\frac{\pi}{6}=30°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad\vee\quad x-\frac{\pi}{3}=\left[\pi-\frac{\pi}{6}\right]+2k\pi$ *Ossia* $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi}\quad\vee\quad\boldsymbol{x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi}$

Esempio 9

$$|2sin\ 3x|-1=0$$

<u>Soluzione</u>

Esplicitiamo il valore assoluto:	$\lvert 2sin\ 3x\rvert=1$ $2sin\ 3x=+1\quad sin\ 3x=+\frac{1}{2}$ $2sin\ 3x=-1\quad sin\ 3x=-\frac{1}{2}$
$L'angolo\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $tale\ che\quad sin\ \alpha=\frac{1}{2}\quad è$ $\alpha=\frac{\pi}{6}=30°$	$L'angolo\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $tale\ che\quad sin\ \alpha=-\frac{1}{2}\quad è$ $\alpha=-\frac{\pi}{6}=-30°$
$3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad\vee\quad 3x=\left[\pi-\frac{\pi}{6}\right]+2k\pi$	$3x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad\vee\quad 3x=\left[\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]+2k\pi$
$x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\quad\vee\quad x=\frac{5}{18}\pi+\frac{2}{3}k\pi$	$x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\quad\vee\quad x=\frac{7}{18}\pi+\frac{2}{3}k\pi$
Tutte le soluzioni dell'equazione sono sintetizzate in:	$\boldsymbol{x=\pm\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}}$

Soluzioni al variare di k di $\boldsymbol{x=+\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}}$

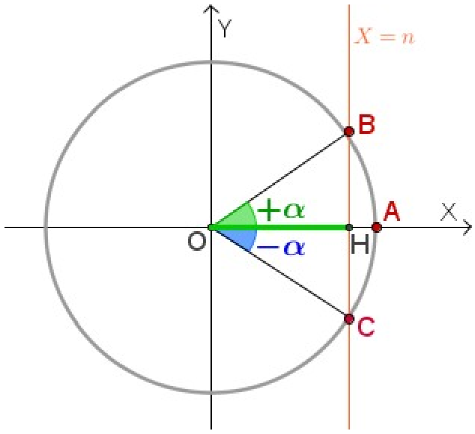
k	**-6**	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x	**-350**	**-290**	**-230**	**-170**	**-110**	**-50**	**10**	**70**	**130**	**190**	**250**	**310**

Soluzioni al variare di k di $\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}}$

k	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x	**-310**	**-250**	**-190**	**-130**	**-70**	**-10**	**50**	**110**	**170**	**230**	**290**	**350**

Un’equazione goniometrica elementare nella funzione coseno è un’equazione del tipo:

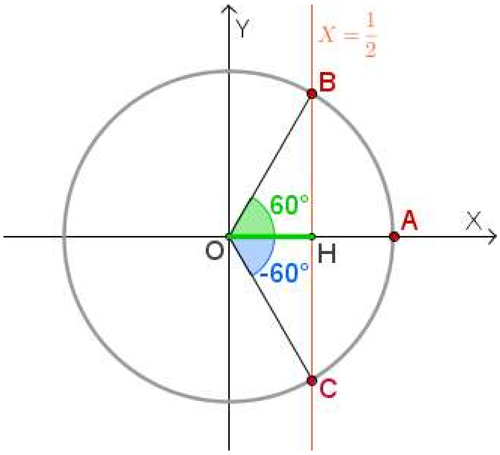
$$\boxed{\boldsymbol{\cos x = n}}$$

Soluzione	Rappresentazione grafica
La retta di equazione $X = n$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli: α e $-\alpha$. Le soluzioni dell’equazione $\cos x = n$ con $-1 \leq n \leq +1$ sono: $\boldsymbol{x = \pm\alpha + 2k\,\pi}$	
Si conviene di considerare come angolo soluzione α quello appartenente all’intervallo $[0, \pi]$	

Esempio 1

$$\boldsymbol{\cos x = \frac{1}{2}}$$

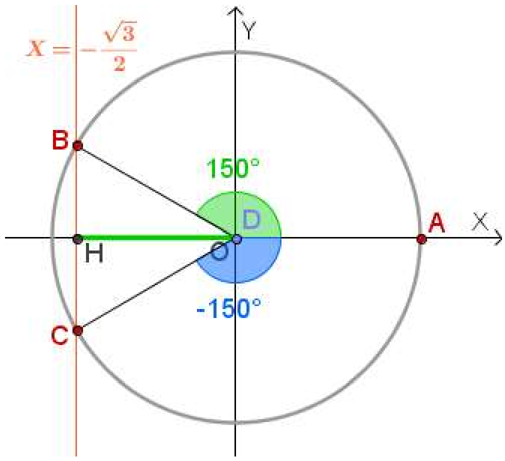
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$

Esempio 2

$$\boldsymbol{\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *è* $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 150°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$

Esempio 3

$$\boldsymbol{\cos x = \frac{4}{3}}$$

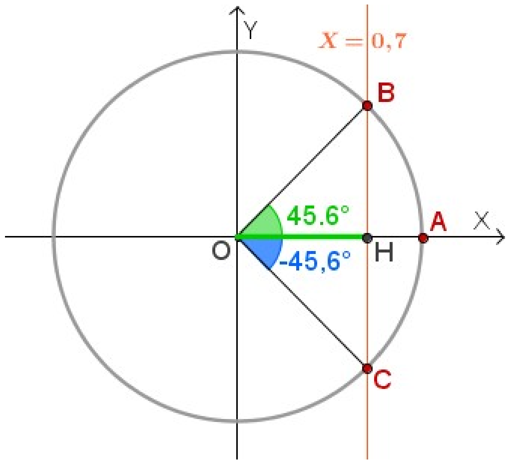
<u>*Soluzione*</u>

L'equazione è impossibile perché $\frac{4}{3} \notin [-1,1]$.

Esempio 4

$\boldsymbol{cos\ x = 0,7}$

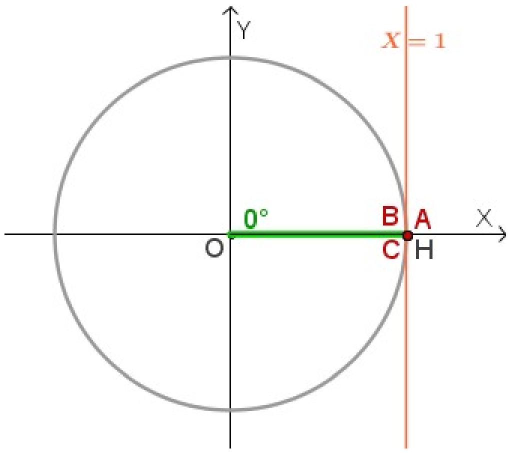
<u>Soluzione</u>

Il valore $0{,}7$ *di* $cos\ x$ *non è un valore noto.* *In questo caso per trovare l'angolo* α *si utilizza la funzione* $arccos\ n$. *L'angolo* $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $cos\ \alpha = 0{,}7$ *è* $\alpha = arccos\ 0{,}7 \cong 0{,}80\ rad \cong 45{,}6°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \pm\, arccos\ 0,7 + 2k\pi}$
Utilizzando una calcolatrice scientifica è possibile ricavare un valore approssimato di $arccos\ 0{,}7$.	$\boldsymbol{x \cong \pm 0,80 + 2k\pi}$

Esempio 5

$\boldsymbol{cos\ x = 1}$

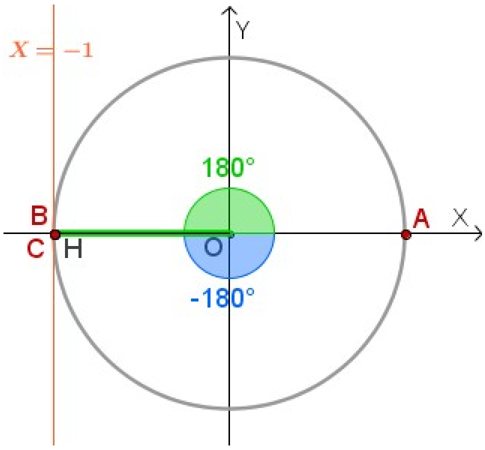
<u>Soluzione</u>

L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $cos\ \alpha = 1$ *è* $\alpha = 0$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = 2k\pi}$

Esempio 6

$$\boldsymbol{cos\, x = -1}$$

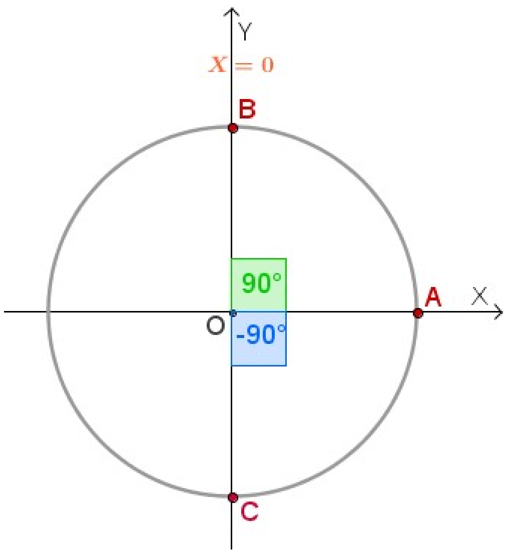
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos\alpha = -1$ *è* $\alpha = \pi = 180°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \pi + 2k\pi}$

Esempio 7

$$\boldsymbol{cos\, x = 0}$$

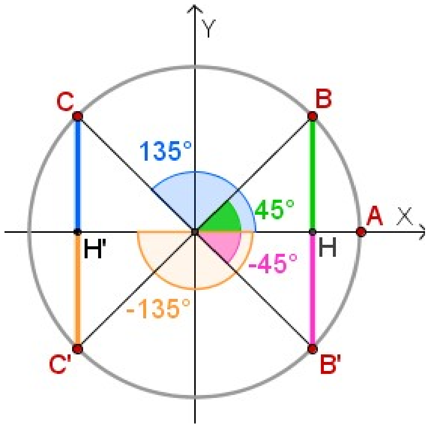
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos\alpha = 0$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
Le soluzioni possono essere espresse dalla formula più sintetica:	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

Esempio 8

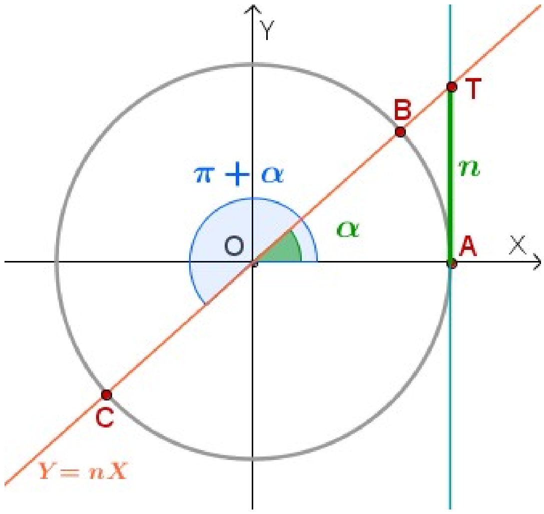
$$2(\cos 2x+3)-3=3(1-\cos 2x)$$

<u>*Soluzione*</u>

Trasformiamo l'equazione in forma canonica:	$2\cos 2x+6-3=3-3\cos 2x$ $5\cos 2x=0$ $\cos 2x=0$
L'angolo $\alpha \in [0,\pi]$ *tale che* $\cos\alpha=0$ *è* $\alpha=\frac{\pi}{2}=90°$	
Tutte le soluzioni dell'equazione sono sintetizzate in:	$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ *Ossia* $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$ *Oppure, come si evince dal grafico, si ha:* $\boldsymbol{x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi}$ 

Un’equazione goniometrica elementare nella funzione tangente è un’equazione del tipo:

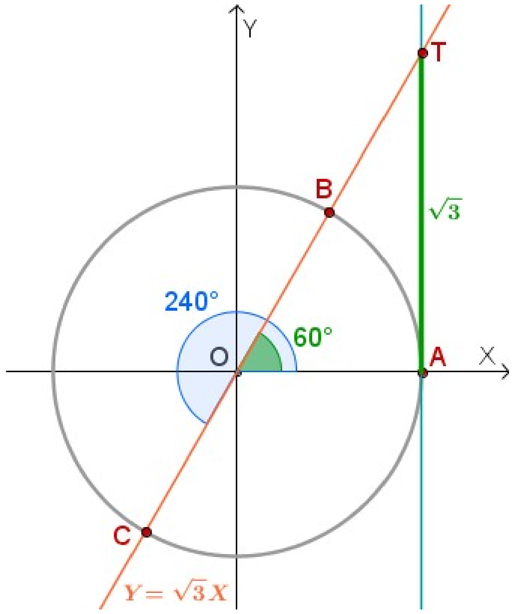
$$\boldsymbol{\tan x = n}$$

Soluzione	Rappresentazione grafica
La retta di equazione $Y = nX$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli: α e $\pi + \alpha$. Le soluzioni dell’equazione $\tan x = n$ con $n \in R$ sono: $\boldsymbol{x = \alpha + k\,\pi}$	
Si conviene di considerare come angolo soluzione α quello appartenente all’intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	

Esempio 1

$\boldsymbol{tan\ x = \sqrt{3}}$

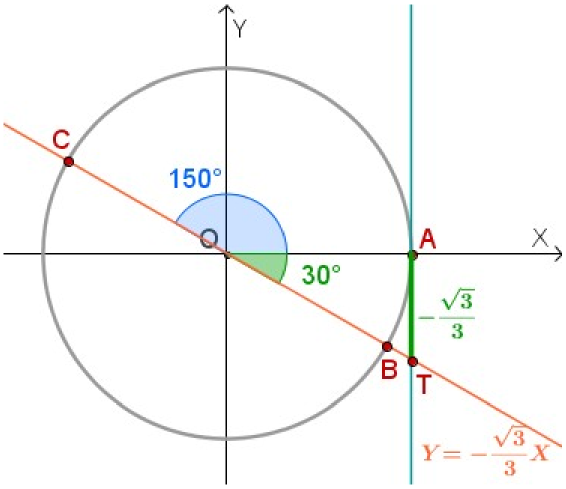
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\quad tan\ x = \sqrt{3}\quad$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k\pi}$

Esempio 2

$\boldsymbol{tan\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

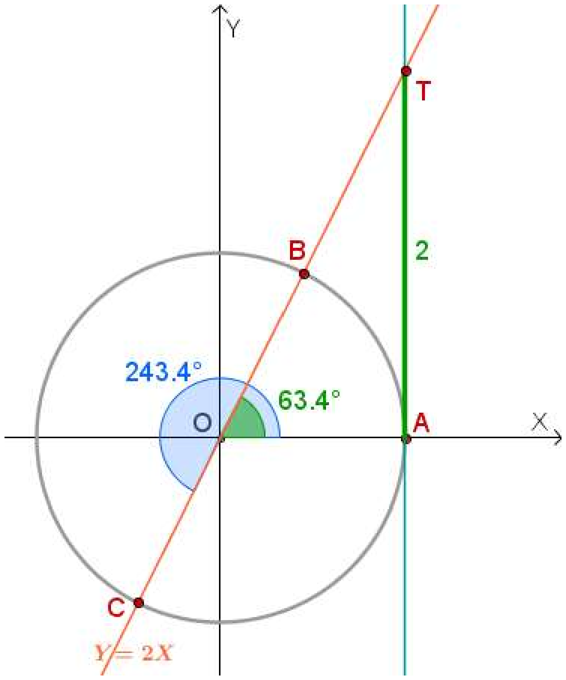
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\quad tan\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\quad$ *è* $\alpha = -\frac{\pi}{6} = -30°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + k\pi}$

Esempio 3

$\boldsymbol{tan\, x = 2}$

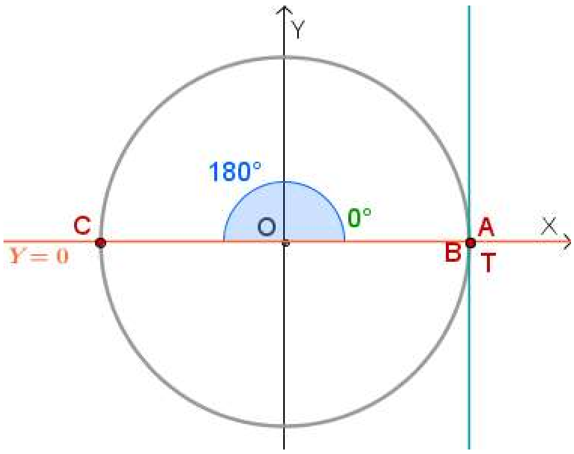
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\tan x = 2$ *è* $\alpha = arctan\, 2 \cong 1{,}11\, rad \cong 63{,}4°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = arctan\, 2 + k\pi}$
Utilizzando una calcolatrice scientifica è possibile ricavare un valore approssimato di $arctan\, 2$ *.*	$\boldsymbol{x = 1,11 + k\pi}$

Esempio 4

$\boldsymbol{tan\, x = 0}$

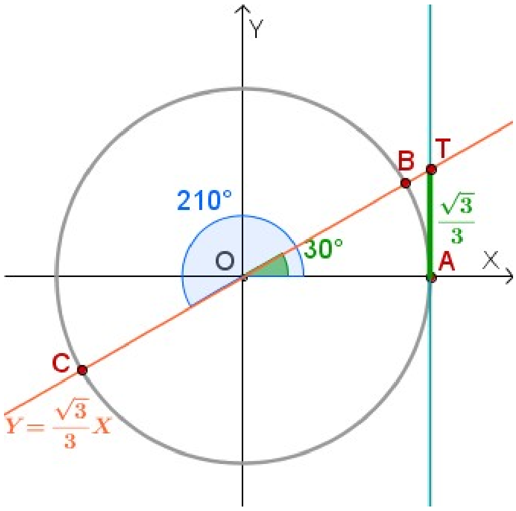
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\tan x = 0$ *è* $\alpha = 0$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = k\pi}$

Esempio 5

$$\mathbf{3tan}\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{9}}\right)-\sqrt{\mathbf{3}}=\mathbf{0}$$

Soluzione

Trasformiamo l'equazione in forma canonica:	$tan\left(x+\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$
L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $tan\, x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *è* $\alpha=\frac{\pi}{6}=30°$	
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono:	$x+\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{6}+k\pi$ *ossia* $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{18}}+\boldsymbol{k\pi}$

Equazioni goniometriche elementari (II tipo)

Le equazioni goniometriche elementari del II tipo sono:

$\boldsymbol{\sin f(x) = \sin g(x)}$ $\boldsymbol{\cos f(x) = \cos g(x)}$ $\boldsymbol{\tan f(x) = \tan g(x)}$

Le soluzioni sono riassunte nel seguente schema.

Equazione	**Soluzione** *(in radianti)*
$\boldsymbol{\sin f(x) = \sin g(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = g(x) + 2k\,\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{f(x) = [\pi - g(x)] + 2k\,\pi}$
$\boldsymbol{\cos f(x) = \cos g(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = \pm\, g(x) + 2k\,\pi}$
$\boldsymbol{\tan f(x) = \tan g(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = g(x) + k\,\pi}$ $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Altri tipi di equazioni goniometriche elementari (II tipo)

$\boldsymbol{\sin f(x) = -\sin g(x)}$	*è equivalente a*	$\boldsymbol{\sin f(x) = \sin[-g(x)]}$
$\boldsymbol{\cos f(x) = -\cos g(x)}$	*è equivalente a*	$\boldsymbol{\cos f(x) = \cos[\pi - g(x)]}$
$\boldsymbol{\sin f(x) = \cos g(x)}$	*è equivalente a*	$\boldsymbol{\sin f(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - g(x)\right]}$
$\boldsymbol{\sin f(x) = -\cos g(x)}$	*è equivalente a*	$\boldsymbol{\sin f(x) = \sin\left[-\frac{\pi}{2} + g(x)\right]}$
$\boldsymbol{\tan f(x) = -\tan g(x)}$	*è equivalente a*	$\boldsymbol{\tan f(x) = \tan[-g(x)]}$

Esempio 1

$$\boldsymbol{sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

<u>*Soluzione*</u>

L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x)=g(x)+2k\,\pi \quad \vee \quad f(x)=[\pi-g(x)]+2k\,\pi$ *ossia* $\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=5x+\frac{\pi}{2}+2k\,\pi \quad \vee \quad \left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\left[\pi-\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)\right]+2k\,\pi$ $2x-5x=-\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}+2k\,\pi \quad \vee \quad 2x+5x=-\frac{\pi}{5}+\pi-\frac{\pi}{2}+2k\,\pi$ $-3x=\frac{3\pi}{10}+2k\,\pi \quad \vee \quad 7x=\frac{3\pi}{10}+2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2}{3}k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x=\frac{3}{70}\pi+\frac{2}{7}k\,\pi}$

Esempio 2

$$\boldsymbol{cos\left(5x-\frac{2}{3}\pi\right)=cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

<u>*Soluzione*</u>

L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x)=+g(x)+2k\,\pi \quad \vee \quad f(x)=-g(x)+2k\,\pi$ *ossia* $\left(5x-\frac{2}{3}\pi\right)=+\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\,\pi \quad \vee \quad \left(5x-\frac{2}{3}\pi\right)=-\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\,\pi$ $5x-3x=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}+2k\,\pi \quad \vee \quad 5x+3x=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}+2k\,\pi$ $2x=\frac{11}{12}\pi+2k\,\pi \quad \vee \quad 8x=\frac{5}{12}\pi+2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=\frac{11}{24}\pi+k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x=\frac{5}{96}\pi+k\frac{\pi}{4}}$

Esempio 3

$$\boldsymbol{tan\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)=tan\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)}$$

Soluzione

L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x)=+g(x)+k\,\pi \quad con \quad f(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \wedge \quad g(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ *ossia* $\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)=+\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)+k\,\pi \quad con \quad 3x+\frac{\pi}{7}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \wedge \quad 4x-\frac{\pi}{8}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $3x-4x=-\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{8}+k\,\pi \quad con \quad 3x\neq-\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \wedge \quad 4x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}+k\pi$ $-x=-\frac{15}{56}\pi+k\,\pi \quad con \quad 3x\neq\frac{5}{14}\pi+k\pi \quad \wedge \quad 4x\neq\frac{5}{8}\pi+k\pi$ $x=\frac{15}{56}\pi+k\,\pi \quad con \quad x\neq\frac{5}{42}\pi+k\frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad x\neq\frac{5}{32}\pi+k\frac{\pi}{4}$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=\frac{15}{56}\pi+k\,\pi}$ ***Soluzioni accettabili***

Esempio 4

$$\boldsymbol{sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=-sin\left(\frac{3}{4}\pi-3x\right)}$$

Soluzione

Ricordando che:	$sin\,f(x)=-\,sin\,g(x)$ *è equivalente a* $sin\,f(x)=sin[-g(x)]$
si ottiene:	$sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=sin\left[-\left(\frac{3}{4}\pi-3x\right)\right]$ $sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=sin\left(3x-\frac{3}{4}\pi\right)$
L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x)=g(x)+2k\,\pi \quad \vee \quad f(x)=[\pi-g(x)]+2k\,\pi$ *ossia* $\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\left(3x-\frac{3}{4}\pi\right)+2k\,\pi \quad \vee \quad \left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\left[\pi-\left(3x-\frac{3}{4}\pi\right)\right]+2k\,\pi$ $2x-3x=\frac{\pi}{8}-\frac{3}{4}\pi+2k\,\pi \quad \vee \quad 2x+3x=\frac{\pi}{8}+\pi+\frac{3}{4}\pi+2k\,\pi$ $-x=-\frac{5}{6}\pi+2k\,\pi \quad \vee \quad 5x=\frac{15}{8}\pi+2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{3}{8}\pi+\frac{2k\pi}{5}}$

Esempio 5

$$\boldsymbol{cos\left(4x-\frac{2}{5}\pi\right) = -cos\left(3x+\frac{4}{5}\pi\right)}$$

<u>*Soluzione*</u>

Ricordando che:	$cos\, f(x) = -\,cos\, g(x)$ *è equivalente a* $cos\, f(x) = cos[\pi - g(x)]$
si ottiene:	$sin\left(4x-\frac{2}{5}\pi\right) = cos\left[\pi-\left(3x+\frac{4}{5}\pi\right)\right]$ $sin\left(4x-\frac{2}{5}\pi\right) = cos\left(\frac{\pi}{5}-3x\right)$
L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x) = +g(x) + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad f(x) = -g(x) + 2k\,\pi$ *ossia* $\left(4x-\frac{2}{5}\pi\right) = \left(\frac{\pi}{5}-3x\right) + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad \left(4x-\frac{2}{5}\pi\right) = -\left(\frac{\pi}{5}-3x\right) + 2k\,\pi$ $4x+3x = \frac{2}{5}\pi + \frac{\pi}{5} + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad 4x-3x = \frac{2}{5}\pi - \frac{\pi}{5} + 2k\,\pi$ $7x = \frac{3}{5}\pi + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{\pi}{5} + 2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \frac{3}{35}\pi + \frac{2k\pi}{7} \qquad \vee \qquad x = \frac{\pi}{5} + 2k\,\pi}$

Esempio 6

$$\boldsymbol{cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right) = -cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

<u>*Soluzione*</u>

Ricordando che:	$cos\, f(x) = -\,cos\, g(x)$ *è equivalente a* $cos\, f(x) = cos[\pi - g(x)]$
si ottiene:	$cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right) = cos\left[\pi-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$ $cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x) = +g(x) + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad f(x) = -g(x) + 2k\,\pi$ *ossia* $2x-\frac{\pi}{5} = +\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad 2x-\frac{\pi}{5} = -\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 2k\,\pi$ $2x+x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad 2x-x = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$ $3x = \frac{7\pi}{10} + 2k\,\pi \qquad \vee \qquad x = -\frac{3}{10}\pi + 2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \frac{7}{30}\pi + \frac{2}{3}k\pi \qquad \vee \qquad x = -\frac{3}{10}\pi + 2k\,\pi}$

Esempio 7

$$\sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

<u>Soluzione</u>

Ricordando che:	$\sin f(x) = \cos g(x)$ *è equivalente a* $\sin f(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - g(x)\right]$
si ottiene:	$\sin 4x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right]$ $\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$
L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x) = g(x) + 2k\,\pi \quad \vee \quad f(x) = [\pi - g(x)] + 2k\,\pi$ *ossia* $4x = \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + 2k\,\pi \quad \vee \quad 4x = \left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right] + 2k\,\pi$ $4x - 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \quad \vee \quad 4x + 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi$ $2x = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \quad \vee \quad 6x = \frac{3}{4}\pi + 2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{8}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}}$ *Oppure in maniera più sintetica:* $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}}$

Esempio 8

$$\sin\left(4x - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$$

<u>Soluzione</u>

Ricordando che:	$\sin f(x) = -\cos g(x)$ *è equivalente a* $\sin f(x) = \sin\left[-\frac{\pi}{2} + g(x)\right]$
si ottiene:	$\sin\left(4x - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left[-\frac{\pi}{2} + \left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right]$ $\sin\left(4x - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(3x - \frac{3}{10}\pi\right)$
L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x) = g(x) + 2k\,\pi \quad \vee \quad f(x) = [\pi - g(x)] + 2k\,\pi$ *ossia* $\left(4x - \frac{\pi}{10}\right) = \left(3x - \frac{3}{10}\pi\right) + 2k\,\pi \quad \vee \quad \left(4x - \frac{\pi}{10}\right) = \left[\pi - \left(3x - \frac{3}{10}\pi\right)\right] + 2k\,\pi$ $4x - 3x = \frac{\pi}{10} - \frac{3}{10}\pi + 2k\,\pi \quad \vee \quad 4x + 3x = \frac{\pi}{10} + \pi + \frac{3}{10}\pi + 2k\,\pi$ $x = -\frac{\pi}{5} + 2k\,\pi \quad \vee \quad 7x = \frac{7}{5}\pi + 2k\,\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{5} + 2k\,\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{7}}$

Esempio 9

$$\boldsymbol{tan\left(3x+\frac{13}{36}\pi\right)=-tan\left(2x-\frac{5}{36}\pi\right)}$$

<u>*Soluzione*</u>

Ricordando che:	$tan\, f(x) = -\,tan\, g(x)$ *è equivalente a* $tan\, f(x) = tan[-g(x)]$
si ottiene:	$tan\left(3x+\frac{13}{36}\pi\right) = tan\left[-\left(2x-\frac{5}{36}\pi\right)\right]$ $tan\left(3x+\frac{13}{36}\pi\right) = tan\left(\frac{5}{36}\pi-2x\right)$
L'uguaglianza si verifica quando:	$f(x) = g(x) + k\,\pi$ *con* $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *ossia* $\left(3x+\frac{13}{36}\pi\right) = \left(\frac{5}{36}\pi-2x\right) + k\pi$ *con* $3x+\frac{13}{36}\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad \frac{5}{36}\pi - 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $3x + 2x = -\frac{13}{36}\pi + \frac{5}{36}\pi + k\pi$ *con* $3x \neq -\frac{13}{36}\pi + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad 2x \neq \frac{5}{36}\pi - \frac{\pi}{2} + k\pi$ $5x = -\frac{2}{9}\pi + k\pi$ *con* $3x \neq \frac{5}{36}\pi + k\pi \quad \wedge \quad 2x \neq -\frac{13}{36}\pi + k\pi$ $x = -\frac{2}{45}\pi + k\frac{\pi}{5}$ *con* $x \neq \frac{5}{108}\pi + k\frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad x \neq -\frac{13}{72}\pi + k\frac{\pi}{2}$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{2}{45}\pi + k\frac{\pi}{5}}$ ***Soluzioni accettabili***

Alcune equazioni possono essere ricondotte a equazioni elementari mediante una sostituzione.

Esempio 1

$$\boldsymbol{4cos^2 x - 4\sqrt{3}cos\, x + 3 = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo $cos\,x = z$	$4\,z^2 - 4\sqrt{3}\,z + 3 = 0$
Risolviamo l'equazione:	$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 3 = 12 - 12 = 0$ $z_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Sostituiamo $cos\,x = z$	$cos\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$

Esempio 2

$$\boldsymbol{2\,sin^2\,x \ + \ sin\,x = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo $sin\,x = z$	$2\,z^2 + z = 0$
Risolviamo l'equazione:	$z\cdot(2z+1) = 0$ $\quad$ $z = 0$, $2z + 1 = 0$ $\quad$ $z = 0$, $z = -\frac{1}{2}$
Sostituiamo $sin\,x = z$	$sin\,x = 0$ $\quad$ $x = k\pi$ $sin\,x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \left[\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2k\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi}$

Esempio 3

$$\tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$$

Soluzione

Poniamo $\tan x = z$	$z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$
Risolviamo l'equazione:	$\Delta = b^2 - 4ac = \left[-(1+\sqrt{3})\right]^2 - 4\cdot 1\cdot\sqrt{3} = 1+3+2\sqrt{3}-4\sqrt{3} =$ $= 1+3-2\sqrt{3} = (1-\sqrt{3})^2$ $z_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{3}\mp\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$
Sostituiamo $\tan x = z$	$\tan x = \sqrt{3} \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $\tan x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$

Esempio 4

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

Soluzione

Sostituiamo:	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \rightarrow \quad 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 - 2\cdot(1-\cos^2 x) = 0$
Semplifichiamo l'equazione:	$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 - 2 + 2\cos^2 x = 0$ $4\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$
Poniamo $\cos x = z$	$4z^2 - 3z - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione:	$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 4\cdot(-1) = 9 + 16 = 25$ $z_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\mp\sqrt{25}}{2\cdot 4} = \begin{cases} \frac{3-5}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \\ \frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = +1 \end{cases}$
Sostituiamo $\cos x = z$	$\cos x = -\frac{1}{4} \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$ $\cos x = +1 \qquad x = 0 + 2k\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi}$

Esempio 5

$$\boldsymbol{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos 2x=0}$$

Soluzione

Utilizziamo le formule di addizione, sottrazione e duplicazione:	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
Effettuiamo le sostituzioni:	$\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x\cos\frac{2}{3}\pi-\sin x\sin\frac{2}{3}\pi+\cos^2 x-\sin^2 x=0$
	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$ $-\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$
Sostituiamo: $\sin^2 x=1-\cos^2 x$	$-\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=0$
Semplifichiamo l'equazione:	$-\cos x+\cos^2 x-1+\cos^2 x=0$ $+2\cos^2 x-\cos x-1=0$
Poniamo $\cos x=z$	$2z^2-z-1=0$
Risolviamo l'equazione:	$\Delta = b^2-4ac = 1-4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$ $z_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\mp\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\begin{cases}\frac{1-3}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\\ \frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=+1\end{cases}$
Sostituiamo $\cos x=z$	$\cos x=-\frac{1}{2}$ $\quad x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ $\cos x=+1$ $\quad x=0+2k\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=2k\pi}$ $\quad\vee\quad$ $\boldsymbol{x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi}$

Esempio 6

$$\boldsymbol{\sin x + \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} = 0}$$

Soluzione

Soluzione

Utilizziamo la formula di duplicazione:	$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
Otteniamo:	$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
Sostituiamo $\sin x$ *:*	$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} = 0$
Raccogliamo a fattor comune $\sin\frac{x}{2}$ *:*	$\sin\frac{x}{2}\cdot\left(2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\right) = 0$ $\quad \sin\frac{x}{2} = 0 \quad 2\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$
Risolviamo le due equazioni:	$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad x = 2k\pi$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{x}{2} = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad x = \pm\frac{5}{3}\pi + 4k\pi$
Le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \pm\frac{5}{3}\pi + 4k\pi}$
Le soluzioni sono uguali:	$\boldsymbol{x = 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{7}{3}\pi + 4k\pi}$

Equazioni lineari in seno e coseno

Un'equazione lineare in seno e coseno è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$\boxed{\boldsymbol{a \sin x + b \cos x + c = 0}}$$

Equazione lineare incompleta

Un'equazione lineare incompleta in seno e coseno è del tipo: $\boldsymbol{a \sin x + b \cos x = 0}$

Per risolvere questa equazione si dividono tutti i termini per $\cos x \neq 0$.

Si ottiene l'equazione elementare: $a \tan x + b = 0$.

E' stato possibile dividere per $\cos x$ perché $\cos x \neq 0$. Infatti i valori per i quali $\cos x = 0$ non sono soluzioni dell'equazione.

Equazione lineare completa

Un'equazione lineare completa in seno e coseno è del tipo: $\boldsymbol{a \sin x + b \cos x + c = 0}$

Le tecniche risolutive sono diverse.

Metodo 1 – Formule parametriche

Si utilizzano le formule parametriche ottenendo un'equazione nell'incognita $\boldsymbol{t}$.

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \boldsymbol{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad con \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

Occorre comunque verificare se l'equazione ha anche le soluzioni: $x = \pi + 2k\,\pi$

Regola pratica:
Se l'equazione che si ottiene dall'utilizzo delle equazioni parametriche è di I grado l'equazione ha anche le soluzioni $x = \pi + 2k\,\pi$

Metodo 2 – Metodo grafico

Questo metodo riconduce la risoluzione dell'equazione a un problema di geometria analitica.

Si considera il sistema:	$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$
Si pone:	$X = \cos x \quad e \quad Y = \sin x$
Si ottiene il sistema costituito dalle equazioni di una retta e della circonferenza goniometrica:	$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$
I punti di intersezione fra la retta e la circonferenza goniometrica sono le soluzioni dell'equazione.	

Metodo 3 – Metodo dell'angolo aggiunto

L'equazione $a\sin x + b\cos x + c = 0$ si trasforma nell'equazione goniometrica elementare:

$\boldsymbol{A\sin(x+\alpha) + c = 0}$

sostituendo $\boldsymbol{A = \sqrt{a^2+b^2}}$ e $\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{b}{a}}$.

Dimostrazione

Queste risultano equivalenti se: $\begin{cases} A\cos\alpha = a \\ A\ \sin\alpha = b \end{cases}$

Elevando ambo i membri al quadrato si ha: $\begin{cases} A^2\cos^2\alpha = a^2 \\ A^2\ \sin^2\alpha = b^2 \end{cases}$

Sommando membro a membro si ottiene: $A^2\cos^2\alpha + A^2\ \sin^2\alpha = a^2 + b^2$

Semplificando l'espressione si ottiene: $A^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a^2 + b^2$

Applicando la formula di addizione all'equazione: $A\sin(x+\alpha) + c = 0$	$A\sin x\cos\alpha + A\ \cos x\sin\alpha + c = 0$
Confrontando questa equazione con l'equazione:	$a\sin x + b\cos x + c = 0$
Queste risultano equivalenti se:	$\begin{cases} A\cos\alpha = a \\ A\sin\alpha = b \end{cases}$
Elevando ambo i membri al quadrato si ha:	$\begin{cases} A^2\cos^2\alpha = a^2 \\ A^2\ \sin^2\alpha = b^2 \end{cases}$
Sommando membro a membro si ottiene:	$A^2\cos^2\alpha + A^2\ \sin^2\alpha = a^2 + b^2$
Semplificando l'espressione si ottiene:	$A^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a^2 + b^2$ $A^2 = a^2 + b^2$ $\boldsymbol{A = \sqrt{a^2+b^2}}$

Dal sistema:	$\begin{cases} A\cos\alpha = a \\ A\sin\alpha = b \end{cases}$
Dividendo membro a membro si ottiene:	$\frac{A\ \sin\alpha}{A\cos\alpha} = \frac{b}{a}$
Utilizzando la funzione tangente:	$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{b}{a}}$

Esempio 1 – Equazione lineare incompleta

$$\sqrt{3}\,\boldsymbol{\sin x - \cos x = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Dividiamo tutti i termini per $\cos x \neq 0$:	$\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
La soluzione è:	$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi}$
E' stato possibile dividere per $\cos x$ perché $\cos x \neq 0$. Infatti i valori per i quali $\cos x = 0$ non sono soluzioni dell'equazione.	

Esempio 2 – Equazione lineare incompleta

$$\boldsymbol{2\sin x + 3\cos x - \sqrt{2}\left(3\sqrt{2}\sin x + \cos x\right) = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Semplifichiamo l'equazione:	$2\sin x + 3\cos x - 6\sin x - \sqrt{2}\cos x = 0$ $4\sin x + \left(\sqrt{2} - 3\right)\cos x = 0$
Dividiamo tutti i termini per $\cos x \neq 0$:	$\dfrac{4\sin x}{\cos x} + \dfrac{\left(\sqrt{2}-3\right)\cos x}{\cos x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$4\tan x + \sqrt{2} - 3 = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$\tan x = \dfrac{3-\sqrt{2}}{4}$
La soluzione è:	$\boldsymbol{x = \arctan\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{4}\right) + k\pi}$
E' stato possibile dividere per $\cos x$ perché $\cos x \neq 0$. Infatti i valori per i quali $\cos x = 0$ non sono soluzioni dell'equazione.	

Esempio 3 – Equazione lineare completa (Formule parametriche)

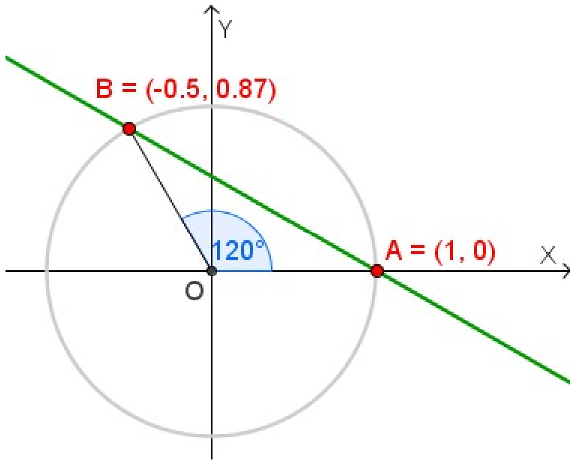
$\mathbf{1 - \cos x - \sqrt{3}\,\sin x = 0}$

<u>*Soluzione*</u>

Utilizziamo le formule parametriche:	$\mathbf{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$ $\quad$ $\mathbf{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ $\quad$ $\mathbf{con \quad t = \tan\frac{x}{2}}$
Otteniamo l'equazione:	$1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} - \sqrt{3}\cdot\frac{2t}{1+t^2} = 0$
Risolviamo l'equazione:	$1 + t^2 - (1 - t^2) - 2\sqrt{3}\,t = 0$ $1 + t^2 - 1 + t^2 - 2\sqrt{3}\,t = 0$ $2t^2 - 2\sqrt{3}\,t = 0$ $2t\cdot\left(t - \sqrt{3}\,\right) = 0$ $\quad$ $2t = 0$ $\quad$ $t = 0$ $t - \sqrt{3} = 0$ $\quad$ $t = \sqrt{3}$
Sostituiamo $t = \tan\frac{x}{2}$	$\tan\frac{x}{2} = 0$ $\quad$ $\frac{x}{2} = k\pi$ $\quad$ $\mathbf{x = 2k\pi}$ $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ $\quad$ $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $\quad$ $\mathbf{x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$
Occorre inoltre verificare se l'equazione ha anche le soluzioni:	$x = \pi + 2k\,\pi$
Verifichiamo se $x = \pi$ *è soluzione:*	$1 - \cos\pi - \sqrt{3}\,\sin\pi = 0$ $1 - (-1) - \sqrt{3}\cdot 0 = 0$ $2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pi + 2k\,\pi$ *non sono soluzioni.* *Come era previsto dalla Regola pratica:* *Se l'equazione che si ottiene dall'utilizzo delle equazioni parametriche è di I grado l'equazione ha anche le soluzioni:* $x = \pi + 2k\,\pi$.
Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:	$\mathbf{x = 2k\pi} \quad \vee \quad \mathbf{x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$

$$\mathbf{1 - \cos x - \sqrt{3}\,\sin x = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Consideriamo il sistema:	$\begin{cases} 1 - \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$
Poniamo:	$X = \cos x \quad e \quad Y = \sin x$
Otteniamo il sistema costituito dalle equazioni di una retta e della circonferenza goniometrica:	$\begin{cases} 1 - X - \sqrt{3}\,Y = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$
Risolviamo il sistema:	$\begin{cases} X = 1 - \sqrt{3}\,Y \\ \left(1 - \sqrt{3}\,Y\right)^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ 1 + 3Y^2 - 2\sqrt{3}\,Y + Y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ 4Y^2 - 2\sqrt{3}\,Y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ 2Y \cdot (2Y - \sqrt{3}) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \\ 2Y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ 2Y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} X = 1 - \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
Sostituendo: $X = \cos x \quad e \quad Y = \sin x$	$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \mathbf{x = 2k\pi}$ $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \mathbf{x = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi}$
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA *I punti di intersezione fra la retta e la circonferenza goniometrica* $A(1\,;\,0)$ *e* $B\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *individuano gli angoli che soddisfano l'equazione.*	

Esempio 5 – Equazione lineare completa (Metodo dell'angolo aggiunto)

$$\mathbf{1 - \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Riscriviamo l'equazione in forma normale: $a \sin x + b \cos x + c = 0$	$\sqrt{3} \sin x + 1 \cos x - 1 = 0$ $\quad a = \sqrt{3} \quad b = 1$
Determiniamo: $\boldsymbol{A = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\boldsymbol{\tan \alpha = \frac{b}{a}}$	$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$
Otteniamo l'equazione goniometrica elementare: $A \sin(x + \alpha) + c = 0$	$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione goniometrica:	$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
Le cui soluzioni sono:	$\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ $\boldsymbol{x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$

Esempio 6 – Equazione lineare completa (Formule parametriche)

$$\boldsymbol{\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1}$$

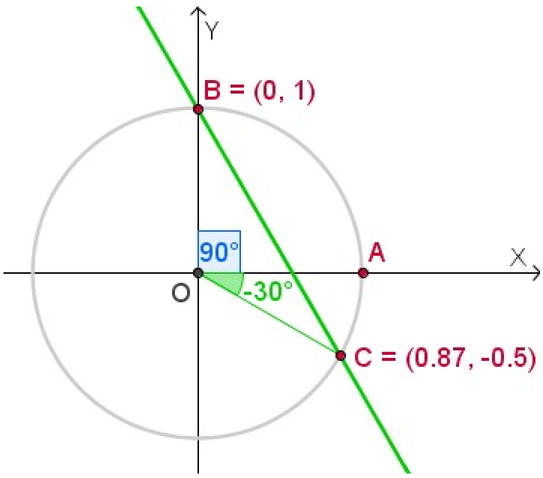
<u>*Soluzione*</u>

Utilizziamo le formule parametriche:	$\boldsymbol{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$ $\quad$ $\boldsymbol{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ $\quad$ $\boldsymbol{con \quad t = \tan\frac{x}{2}}$
Otteniamo l'equazione:	$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione:	$2t + \sqrt{3}\,(1-t^2) - (1+t^2) = 0$ $2t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 - 1 - t^2 = 0$ $\left(1+\sqrt{3}\right)t^2 - 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$ $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 - \left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = 1 - (1-3) = 3$ $t_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} =$ $\quad t_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+3-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}-2$ $t_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 1$
Sostituiamo $t = \tan\frac{x}{2}$	$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{3}-2$ $\quad$ $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ $\quad$ $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $\tan\frac{x}{2} = 1$ $\quad$ $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\quad$ $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
Occorre inoltre verificare se l'equazione ha anche le soluzioni:	$x = \pi + 2k\,\pi$
Verifichiamo se $x = \pi$ *è soluzione:*	$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ $0 + \sqrt{3}\cdot(-1) = 1$ $-\sqrt{3} = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pi + 2k\,\pi$ *non sono soluzioni.* *Come era previsto dalla Regola pratica:* *Se l'equazione che si ottiene dall'utilizzo delle equazioni parametriche è di I grado l'equazione ha anche le soluzioni:* $x = \pi + 2k\,\pi$.
Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

Esempio 7 – Equazione lineare completa (Metodo grafico)

$\boldsymbol{\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1}$

Soluzione

Consideriamo il sistema:	$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$
Poniamo:	$X = \cos x \quad e \quad Y = \sin x$
Otteniamo il sistema costituito dalle equazioni di una retta e della circonferenza goniometrica:	$\begin{cases} Y + \sqrt{3}\, X = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$
Risolviamo il sistema:	$\begin{cases} Y = 1 - \sqrt{3}\, X \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ X^2 + \left(1 - \sqrt{3}\, X\right)^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ X^2 + 1 + 3X^2 - 2\sqrt{3}\, X = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 4X^2 - 2\sqrt{3}\, X = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 2X \cdot \left(2X - \sqrt{3}\right) = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} - \\ 2X = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 2X - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 1 \\ 2X = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} Y = 1 \\ X = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y = 1 - \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} Y = -\dfrac{1}{2} \\ X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
Sostituendo: $X = \cos x \quad e \quad Y = \sin x$	$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $\begin{cases} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\quad$ $\boldsymbol{x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}$
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA *I punti di intersezione fra la retta e la circonferenza goniometrica* $B(0\,;\,1)$ *e* $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ *individuano gli angoli che soddisfano l'equazione.*	

Esempio 8 – Equazione lineare completa (Metodo dell'angolo aggiunto)

$\boldsymbol{\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1}$

<u>*Soluzione*</u>

Riscriviamo l'equazione in forma normale: $a \sin x + b \cos x + c = 0$	$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \qquad a = 1 \qquad b = \sqrt{3}$
Determiniamo: $\boldsymbol{A = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\boldsymbol{\tan \alpha = \frac{b}{a}}$	$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2\,.$ $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$
Otteniamo l'equazione goniometrica elementare: $A \sin(x + \alpha) + c = 0$	$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione goniometrica:	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$
Le cui soluzioni sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

Esempio 9 – Equazione lineare completa (Formule parametriche)

$$\boldsymbol{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1}$$

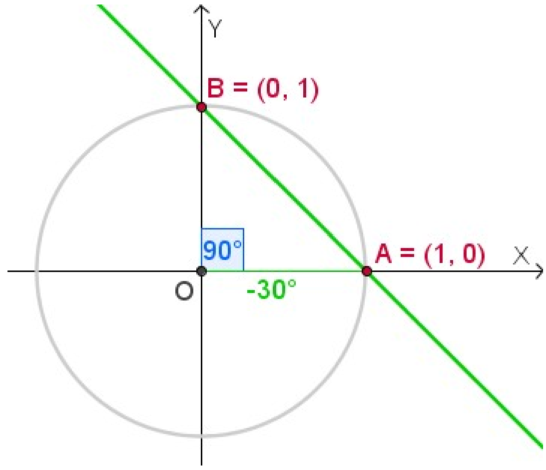
<u>*Soluzione*</u>

Poniamo: $x+\frac{\pi}{6}=z$	$\cos z+\sin z=1$
Utilizziamo le formule parametriche:	$\boldsymbol{\sin z=\frac{2t}{1+t^2}}$ $\boldsymbol{\cos z=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ $\boldsymbol{\text{con}\ \ t=\tan\frac{z}{2}}$
Otteniamo l'equazione:	$\frac{\boldsymbol{1-t^2}}{\boldsymbol{1+t^2}}+\frac{2t}{1+t^2}-1=0$
Risolviamo l'equazione:	$1-t^2+2t-(1+t^2)=0$ $-2t^2+2t=0$ $t^2-t=0$ $t(t-1)=0$ $t=0$ $t=1$
Sostituiamo $t=\tan\frac{x}{2}$	$\tan\frac{z}{2}=0$ $\frac{z}{2}=k\pi$ $z=2k\pi$ $\tan\frac{z}{2}=1$ $\frac{z}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
Sostituendo: $x+\frac{\pi}{6}=z$	$x+\frac{\pi}{6}=2k\pi$ $\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi}$ $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$
Occorre inoltre verificare se l'equazione ha anche le soluzioni:	$x=\pi+2k\,\pi$
Verifichiamo se $x=\pi$ *è soluzione:*	$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=1$ $-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1$ $\rightarrow$ $x=\pi+2k\,\pi$ *non sono soluzioni.* *Come era previsto dalla Regola pratica:* *Se l'equazione che si ottiene dall'utilizzo delle equazioni parametriche è di I grado l'equazione ha anche le soluzioni:* $x=\pi+2k\,\pi$.
Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi}$ $\vee$ $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$

Esempio 10 – Equazione lineare completa (Metodo grafico)

$$\boldsymbol{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1}$$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo $x+\frac{\pi}{6}=z$ *Si ottiene:*	$\cos z+\sin z=1$
Consideriamo il sistema:	$\begin{cases}\cos z+\sin z=1\\ \cos^2 z+\sin^2 z=1\end{cases}$
Poniamo:	$X=\cos z \quad e \quad Y=\sin z$
Otteniamo il sistema costituito dalle equazioni di una retta e della circonferenza goniometrica:	$\begin{cases}X+Y=1\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$
Risolviamo il sistema:	$\begin{cases}Y=1-X\\ X^2+(1-X)^2=1\end{cases}$ $\begin{cases}X^2+1+X^2-2X=1\end{cases}$ $\begin{cases}2X^2-2X=0\end{cases}$ $\begin{cases}2X\cdot(X-1)=0\end{cases}$ $\begin{cases}Y=1-X\\ 2X=0\end{cases}$ $\begin{cases}Y=1\\ X=0\end{cases}$ $B(0\,;\,1)$ $\begin{cases}Y=1-X\\ X-1=0\end{cases}$ $\begin{cases}Y=0\\ X=1\end{cases}$ $A(1\,;\,0)$
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA *I punti di intersezione fra la retta e la circonferenza goniometrica* $A(1\,;\,0)$ *e* $B(0\,;\,1)$ *individuano gli angoli che soddisfano l'equazione.*	
Sostituendo: $X=\cos z \quad e \quad Y=\sin z$	$\begin{cases}\sin z=1\\ \cos z=0\end{cases}$ $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\begin{cases}\sin z=0\\ \cos z=1\end{cases}$ $z=0+2k\pi$
Sostituendo: $x+\frac{\pi}{6}=z$	$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $x+\frac{\pi}{6}=0+2k\pi$ $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$
Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$

Esempio 11 – Equazione lineare completa (Metodo dell'angolo aggiunto)

$$\boldsymbol{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1}$$

Soluzione

Poniamo $x+\frac{\pi}{6}=z$ *Si ottiene:*	$\cos z+\sin z=1$
Riscriviamo l'equazione in forma normale: $a\sin x+b\cos x+c=0$	$\cos z+\sin z-1=0 \qquad a=1 \qquad b=1$
Determiniamo: $\boldsymbol{A=\sqrt{a^2+b^2}}$ $\boldsymbol{\tan\alpha=\frac{b}{a}}$	$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. $\tan\alpha=\frac{1}{1} \quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{\pi}{4}$
Otteniamo l'equazione goniometrica elementare: $A\sin(x+\alpha)+c=0$	$\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$
Risolviamo l'equazione goniometrica:	$\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad\vee\quad \left(z+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ $z=2k\pi \quad\vee\quad z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
Sostituendo: $x+\frac{\pi}{6}=z$ *si ricava:*	$x+\frac{\pi}{6}=2k\pi \quad\vee\quad x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
Le cui soluzioni sono:	$\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

Un'equazione omogenea in seno e coseno è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$\boldsymbol{a\,sin^2 x + b\,sin\,x\,cos\,x + c\,cos^2 x = 0}$$

Equazione omogenea incompleta

Un'equazione omogenea incompleta in seno e coseno è del tipo:

$\boldsymbol{a\,sin^2 x + b\,sin\,x\,cos\,x = 0}$ oppure $\boldsymbol{b\;sin\,x\,cos\,x + c\,cos^2 x = 0}$

Per la risoluzione della prima equazione si procede con il raccoglimento a fattor comune totale di $sin\,x$.

Per la risoluzione della seconda equazione si procede con il raccoglimento a fattor comune totale di $cos\,x$.

Equazione omogenea completa

Un'equazione omogenea completa in seno e coseno è del tipo: $\boldsymbol{a\,sin^2 x + b\,sin\,x\,cos\,x + c\,cos^2 x = 0}$

Le tecniche risolutive sono due.

Metodo 1 – Trasformazione in un'equazione con la sola tangente

Per risolvere questa equazione si dividono i suoi termini per $cos^2 x$ ottenendo l'equazione equivalente:

$$a\frac{sin^2 x}{cos^2 x} + b\frac{sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x} + c\frac{cos^2 x}{cos^2 x} = 0 \qquad ossia \qquad \boldsymbol{a\,tan^2 x + b\,tan\,x + c = 0}$$

E' stato possibile dividere per $\cos x$ *perché* $\cos x \neq 0$ *. Infatti i valori per i quali* $\cos x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

Metodo 2 – Formule di duplicazione

L'equazione si trasforma in un'equazione lineare in seno e coseno di $2x$ mediante le formule:

$$\boldsymbol{sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}} \qquad \boldsymbol{sin\,x\,cos\,x = \frac{1}{2}sin\,2x} \qquad \boldsymbol{cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

Esempio 1 – Equazione omogenea incompleta

$$\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

<u>Soluzione</u>

Raccogliamo a fattor comune totale $\cos x$:	$\cos x \cdot \left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0$
Applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto:	$\cos x = 0$ $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
Risolviamo la prima equazione:	$\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
Risolviamo la seconda equazione:	$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
Dividiamo tutti i termini per $\cos x \neq 0$	$\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
La soluzione è:	$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$
In conclusione le soluzioni dell'equazione sono: $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$	

E' stato possibile dividere per $\cos x$ perché $\cos x \neq 0$. Infatti i valori per i quali $\cos x = 0$ non sono soluzioni dell'equazione.

Esempio 2 – Equazione omogenea incompleta

$\boldsymbol{3\sqrt{2}\,sin^2 x - 6\,sin\,x\,cos\,x = 0}$

<u>Soluzione</u>

Raccogliamo a fattor comune totale $3\,sin\,x$ *:*	$3\,sin\,x \cdot \left(\sqrt{2}\,sin\,x - 2\,cos\,x\right) = 0$
Applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto:	$3\,sin\,x = 0$ $\sqrt{2}\,sin\,x - 2\,cos\,x = 0$
Risolviamo la prima equazione:	$sin\,x = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = k\pi}$
Risolviamo la seconda equazione:	$\sqrt{2}\,sin\,x - 2\,cos\,x = 0$
Dividiamo tutti i termini per $cos\,x \neq 0$	$\dfrac{\sqrt{2}\,sin\,x}{cos\,x} - \dfrac{2\,cos\,x}{cos\,x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$\sqrt{2}\,tan\,x - 2 = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$tan\,x = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \qquad tan\,x = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad tan\,x = \sqrt{2}$
La soluzione è:	$\boldsymbol{x = arctan\,\sqrt{2} + k\pi}$
In conclusione, le soluzioni dell'equazione sono:	$\boldsymbol{x = k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = arctan\,\sqrt{2} + k\pi}$

E' stato possibile dividere per $cos\,x$ *perché* $cos\,x \neq 0$ *. Infatti i valori per i quali* $cos\,x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

Esempio 1 – Equazione omogenea completa (Trasformazione in un'equazione con la sola tangente)

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

<u>*Soluzione*</u>

Dividiamo tutti i termini per $\cos^2 x \neq 0$:	$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$
Poniamo $\tan x = z$	$z^2 - 2z + 1 = 0$
Risolviamo l'equazione di II grado in z :	$\dfrac{\Delta}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = (-1)^2 - 1\cdot 1 = 1 - 1 = 0\,.$ $z_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2}}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$
Sostituendo $\tan x = z$ *si ottiene:*	$\tan x = 1$
Le cui soluzioni sono:	$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi}$

E' stato possibile dividere per $\cos x$ *perché* $\cos x \neq 0$ *. Infatti i valori per i quali* $\cos x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

Esempio 2 – Equazione omogenea completa (Formule di duplicazione)

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

<u>*Soluzione*</u>

Utilizziamo le formule inverse delle formule di duplicazione:	$\boldsymbol{\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}}$ $\quad \boldsymbol{\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}}$ $\quad \boldsymbol{\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x}$
Otteniamo l'equazione:	$\dfrac{1-\cos 2x}{2} - 2\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 0$
Semplifichiamo l'equazione:	$1 - \cos 2x - 2\sin 2x + 1 + \cos 2x = 0$ $-2\sin 2x + 2 = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$\sin 2x = 1 \quad \rightarrow \quad 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
Le cui soluzioni sono:	$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi}$

Esempio 3 – Equazione omogenea completa (Trasformazione in un'equazione con la sola tangente)

$$\sqrt{3}\,\boldsymbol{sin^2 x - 2\,sin\,x\,cos\,x} - \sqrt{3}\,\boldsymbol{cos^2 x = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Dividiamo tutti i termini per $cos^2 x \neq 0$:	$\dfrac{\sqrt{3}\,sin^2 x}{cos^2 x} - \dfrac{2\,sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x} - \dfrac{\sqrt{3}\,cos^2 x}{cos^2 x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$\sqrt{3}\,tan^2 x - 2\,tan\,x - \sqrt{3} = 0$
Poniamo $tan\,x = z$	$\sqrt{3}z^2 - 2z - \sqrt{3} = 0$
Risolviamo l'equazione di II grado in z :	$\dfrac{\Delta}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = (-1)^2 - \sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right) = 1+3 = 4\,.$ $z_{1,2} = \dfrac{-\dfrac{b}{2} \mp \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a} = \dfrac{1 \mp \sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \begin{cases} \dfrac{1-2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{1+2}{\sqrt{3}} = +\dfrac{3}{\sqrt{3}} = +\sqrt{3} \end{cases}$
Sostituendo $tan\,x = z$ *si ottiene:*	$tan\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $tan\,x = +\sqrt{3}$
Le cui soluzioni sono:	$\boldsymbol{x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi}$

E' stato possibile dividere per $cos\,x$ *perché* $cos\,x \neq 0$. *Infatti i valori per i quali* $cos\,x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

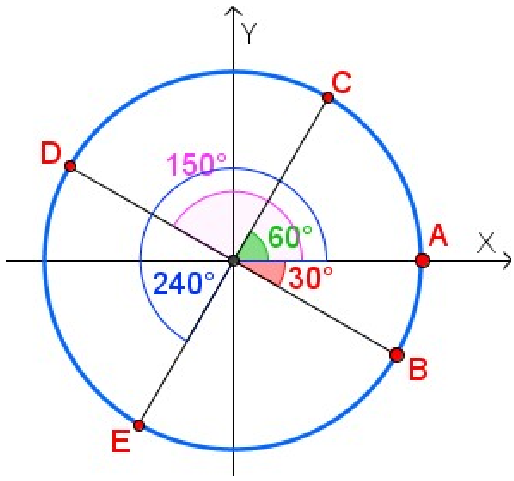
Esempio 4 – Equazione omogenea completa (Formule di duplicazione)

$$\sqrt{3}\,\boldsymbol{sin^2 x - 2\,sin\,x\,cos\,x} - \sqrt{3}\,\boldsymbol{cos^2 x = 0}$$

<u>*Soluzione*</u>

Utilizziamo le formule inverse delle formule di duplicazione:	$sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\quad sin\,x\,cos\,x = \frac{1}{2} sin\,2x$
Otteniamo l'equazione:	$\sqrt{3} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} sin\,2x - \sqrt{3} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$
Semplifichiamo l'equazione:	$\sqrt{3} \cdot (1-\cos 2x) - 2\,sin\,2x - \sqrt{3} \cdot (1+\cos 2x) = 0$ $\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos 2x - 2\,sin\,2x - \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ $-\sqrt{3}\cos 2x - 2\,sin\,2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ $2\,sin\,2x + 2\sqrt{3}\cos 2x = 0$
Risolviamo l'equazione lineare incompleta dividendo tutti i termini per $cos\,2x \neq 0$ *:*	$\frac{2\,sin\,2x}{\cos 2x} + \frac{2\sqrt{3}\cos 2x}{\cos 2x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$2\,tan\,2x + 2\sqrt{3} = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$tan\,2x = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$
Le soluzioni sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}}$

E' stato possibile dividere per $cos\,x$ *perché* $cos\,2x \neq 0$ *. Infatti i valori per i quali* $cos\,x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

Osserviamo che le soluzioni trovate: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ *sono uguali a quelle trovate precedentemente con l'altro metodo.* $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$	

Equazioni riconducibili a omogenee di secondo grado in seno e coseno

Un'equazione del tipo: $\boldsymbol{a\,sin^2 x + b\,sin\,x\,cos\,x + c\,cos^2 x + d = 0}$

è riconducibile ad un'equazione di II grado omogenea moltiplicando il termine noto $\boldsymbol{d}$ per $\boldsymbol{cos^2 x + sin^2 x}$.

Esempio 1 – Equazione riconducibili a omogenee di secondo grado in seno e coseno

$$\boldsymbol{2\,sin^2 x + \sqrt{3}\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x - 2 = 0}$$

Soluzione

Moltiplichiamo il termine noto -2 *per* $cos^2 x + sin^2 x$	$2\,sin^2 x + \sqrt{3}\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x - 2 \cdot (cos^2 x + sin^2 x) = 0$
Semplifichiamo l'equazione:	$2\,sin^2 x + \sqrt{3}\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x - 2cos^2 x - 2\,sin^2 x = 0$ $\sqrt{3}\,sin\,x\,cos\,x - cos^2 x = 0$
Raccogliamo a fattor comune totale $cos\,x$ *:*	$cos\,x \cdot \left(\sqrt{3}\,sin\,x - cos\,x\right) = 0$
Applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto:	$cos\,x = 0$ $\sqrt{3}\,sin\,x - cos\,x = 0$
Risolviamo la prima equazione:	$cos\,x = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$
Risolviamo la seconda equazione:	$\sqrt{3}\,sin\,x - cos\,x = 0$
Dividiamo tutti i termini per $cos\,x \neq 0$	$\frac{\sqrt{3}\,sin\,x}{cos\,x} - \frac{cos\,x}{cos\,x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$\sqrt{3}\,tan\,x - 1 = 0$
Risolviamo l'equazione elementare:	$tan\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad tan\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad tan\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
La soluzione è:	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + k\pi}$
In conclusione, le soluzioni dell'equazione sono: $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + k\pi}$	

E' stato possibile dividere per $cos\,x$ *perché* $cos\,x \neq 0$ *. Infatti i valori per i quali* $cos\,x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

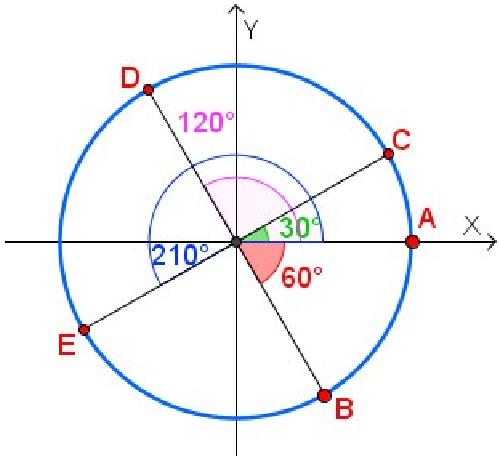
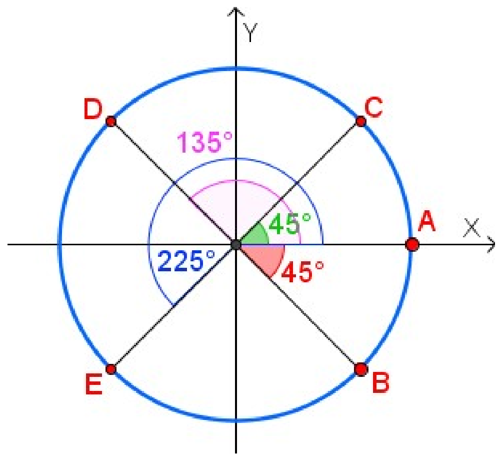
Esempio 2 – Equazione riconducibili a omogenee di secondo grado in seno e coseno

$$\mathbf{2\,sin^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right) sin\,x\,cos\,x + \left(1+\sqrt{3}\right) cos^2 x - 1 = 0}$$

Soluzione

Moltiplichiamo il termine noto -1 *per* $cos^2 x + sin^2 x$	$2\,sin^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right) sin\,x\,cos\,x + \left(1+\sqrt{3}\right) cos^2 x - 1\cdot\left(cos^2 x + sin^2 x\right) = 0$
Semplifichiamo l'equazione:	$2\,sin^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right) sin\,x\,cos\,x + cos^2 x + \sqrt{3}\,cos^2 x - cos^2 x - sin^2 x = 0$ $sin^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right) sin\,x\,cos\,x + \sqrt{3}\,cos^2 x = 0$
Dividiamo tutti i termini per $cos^2 x \neq 0$ *:*	$\frac{sin^2 x}{cos^2 x} + \frac{\left(1+\sqrt{3}\right) sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}\,cos^2 x}{cos^2 x} = 0$
Otteniamo l'equazione:	$tan^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right) tan\,x + \sqrt{3} = 0$
Poniamo $tan\,x = z$	$z^2 + \left(1+\sqrt{3}\right) z + \sqrt{3} = 0$
Risolviamo l'equazione di II grado in z :	$\Delta = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot1\cdot\sqrt{3} = 1+3+2\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 1+3-2\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)^2.$ $z_{1,2} = \frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)\mp\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2\cdot1} = \frac{-1-\sqrt{3}\mp\left\|1-\sqrt{3}\right\|}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}\mp\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} =$ $=$ $\frac{-1-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ $\frac{-1-\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$
Sostituendo $tan\,x = z$ *si ottiene:*	$tan\,x = -\sqrt{3}$ $tan\,x = -1$
Le cui soluzioni sono:	$\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{3} + k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$

E' stato possibile dividere per $cos\,x$ *perché* $cos\,x \neq 0$ *. Infatti i valori per i quali* $cos\,x = 0$ *non sono soluzioni dell'equazione.*

Osservazione	
Le soluzioni $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{3} + k\pi}$ *sono uguali a:* $\boldsymbol{x = \frac{2\pi}{3} + k\pi}$	*Le soluzioni* $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ *sono uguali a:* $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi}$
	

Equazioni goniometriche

Sintesi

Equazioni elementari (I° tipo)

Equazione	Soluzione *(in radianti)*	Soluzione *(in gradi)*
$\sin x = n$ $-1 \le n \le +1$	$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$	$x = \alpha + 2k\ 180°$ $x = (180 - \alpha) + 2k\ 180°$
Quando è possibile si conviene di considerare come angolo soluzione α *quello appartenente all'intervallo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		
$\cos x = n$ $-1 \le n \le +1$	$x = \pm\alpha + 2k\pi$	$x = \pm\alpha + 2k\ 180°$
Quando è possibile si conviene di considerare come angolo soluzione α *quello appartenente all'intervallo* $[0, \pi]$		
$\tan x = n$ $\forall n \in N$	$x = \alpha + k\pi$	$x = \alpha + k\ 180°$
Quando è possibile si conviene di considerare come angolo soluzione α *quello appartenente all'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		

Equazioni elementari (II° tipo)

Equazione	Soluzione *(in radianti)*	Soluzione *(in gradi)*
$\sin x = \sin y$	$x = y + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - y) + 2k\pi$	$x = y + 2k\ 180°$ $x = (180 - y) + 2k\ 180°$
$\cos x = \cos y$	$x = \pm\, y + 2k\pi$	$x = \pm\, y + 2k\ 180°$
$\tan x = \tan y$	$x = y + k\pi$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = y + k\ 180°$

Altri tipi di equazioni elementari

$\sin x = -\sin y$ *è equivalente a* $\sin x = \sin(-y)$	$\cos x = -\cos y$ *è equivalente a* $\cos x = \cos(\pi - y)$	$\sin x = \cos y$ *è equivalente a* $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$	$\sin x = -\cos y$ *è equivalente a* $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + y\right)$	$\tan x = -\tan y$ *è equivalente a* $\tan x = \tan(-y)$

Equazioni lineari in seno e coseno

Un’equazione lineare in seno e coseno è un’equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$\boxed{\boldsymbol{a\sin x + b\cos x + c = 0}}$$

Equazione lineare incompleta

Un’equazione lineare incompleta in seno e coseno è del tipo: $\boldsymbol{a\sin x + b\cos x = 0}$

Per risolvere questa equazione si dividono tutti i termini per $\cos x$.

Si ottiene l’equazione elementare: $a\tan x + b = 0$.

E’ stato possibile dividere per $\cos x$ *perché* $\cos x \neq 0$. *Infatti i valori per i quali* $\cos x = 0$ *non sono soluzioni dell’equazione.*

Equazione lineare completa

Un’equazione lineare completa in seno e coseno è del tipo: $\boldsymbol{a\sin x + b\cos x + c = 0}$

Le tecniche risolutive sono:

Metodo 1 – Formule parametriche

Si utilizzano le formule parametriche ottenendo un’equazione nell’incognita $\boldsymbol{t}$.

$$\boldsymbol{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \boldsymbol{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad con \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

Occorre comunque verificare se l’equazione ha anche le soluzioni: $x = \pi + 2k\,\pi$

Regola pratica:
Se l’equazione che si ottiene dall’utilizzo delle equazioni parametriche è di I grado l’equazione ha anche le soluzioni $x = \pi + 2k\,\pi$

Metodo 2 – Metodo grafico

Questo metodo riconduce la risoluzione dell’equazione a un problema di geometria analitica.

Si considera il sistema:	$\begin{cases} a\sin x + b\cos x + c = 0 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$
Si pone:	$X = \cos x \quad e \quad Y = \sin x$
Si ottiene il sistema costituito dalle equazioni di una retta e della circonferenza goniometrica:	$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$
I punti di intersezione fra la retta e la circonferenza goniometrica sono le soluzioni dell’equazione.	

Metodo 3 – Metodo dell’angolo aggiunto

L’equazione $a\sin x + b\cos x + c = 0$ si trasforma nell’equazione goniometrica elementare:

$\boldsymbol{A\sin(x+\alpha) + c = 0}$

sostituendo $\boldsymbol{A = \sqrt{a^2+b^2}}$ e $\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{b}{a}}$.

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

Un'equazione omogenea in seno e coseno è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$\boldsymbol{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0}$$

Equazione omogenea incompleta

Un'equazione omogenea incompleta in seno e coseno è del tipo:

$\boldsymbol{a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0}$ oppure $\boldsymbol{b\ \sin x\cos x + c\cos^2 x = 0}$

Per la risoluzione della prima equazione si procede con il raccoglimento a fattor comune totale di $\sin x$.

Per la risoluzione della seconda equazione si procede con il raccoglimento a fattor comune totale di $\cos x$.

Equazione omogenea completa

Un'equazione omogenea completa in seno e coseno è del tipo: $\boldsymbol{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0}$

Le tecniche risolutive sono:

Metodo 1 – Trasformazione in un'equazione con la sola tangente

Per risolvere questa equazione si dividono i suoi termini per $\cos^2 x$ ottenendo l'equazione equivalente:

$$a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \qquad ossia \qquad \boldsymbol{a\tan^2 x + b\tan x + c = 0}$$

E' stato possibile dividere per $\cos x$ perché $\cos x \neq 0$. Infatti i valori per i quali $\cos x = 0$ non sono soluzioni dell'equazione.

Metodo 2 – Formule di duplicazione

L'equazione si trasforma in un'equazione lineare in seno e coseno di $2x$ mediante le formule:

$$\boldsymbol{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}} \qquad \boldsymbol{\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x} \qquad \boldsymbol{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Equazioni riconducibili a omogenee di secondo grado in seno e coseno

Un'equazione del tipo: $\boldsymbol{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d = 0}$

è riconducibile ad un'equazione di II grado omogenea moltiplicando il termine noto $\boldsymbol{d}$ per $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x}$.