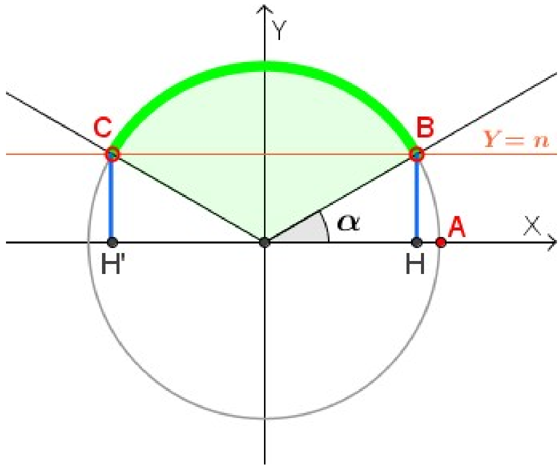
Disequazioni goniometriche

Teoria ed esempi

Disequazioni goniometriche elementari

Una disequazione goniometrica elementare nella funzione seno è una disequazione del tipo:

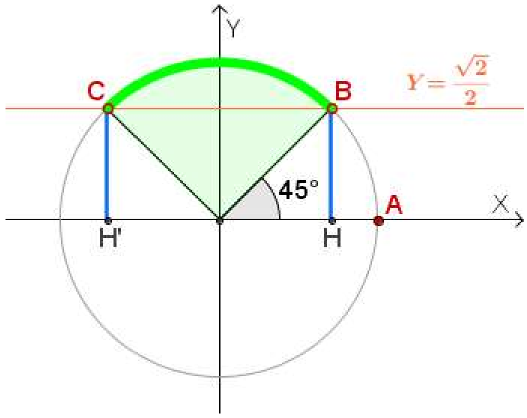
$\boldsymbol{sin\, x} > n$ *oppure* < 0 , ≤ 0 , ≥ 0

Soluzione	Rappresentazione grafica
La retta di equazione $Y = n$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli: α e $\pi - \alpha$. La disequazione, nell'intervallo $[0\,, 2\pi]$, è soddisfatta per: $\alpha < x < (\pi - \alpha)$ Le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ sono: $\boldsymbol{\alpha + 2k\,\pi \ < \ x \ < \ (\pi - \alpha) + 2k\,\pi}$	

Esempio 1

$$\boldsymbol{\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

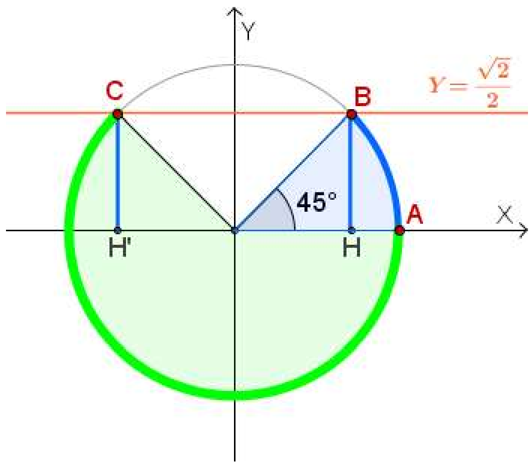
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$	
La retta di equazione $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ *e* $\pi - \alpha = \frac{3}{4}\pi = 135°$.	
Gli angoli $\alpha \in [0, 2\pi]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$
*Pertanto le soluzioni della disequazione in **R** sono:*	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi}$

Esempio 2

$$\boldsymbol{\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$	
La retta di equazione $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ *e* $\pi - \alpha = \frac{3}{4}\pi = 135°$.	
Gli angoli $\alpha \in [0, 2\pi]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ∨ $\frac{3}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$
*Pertanto le soluzioni della disequazione in **R** sono:*	$\boldsymbol{2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$ ∨ $\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi}$

Esempio 3

$\boldsymbol{sin\, x} > 1$

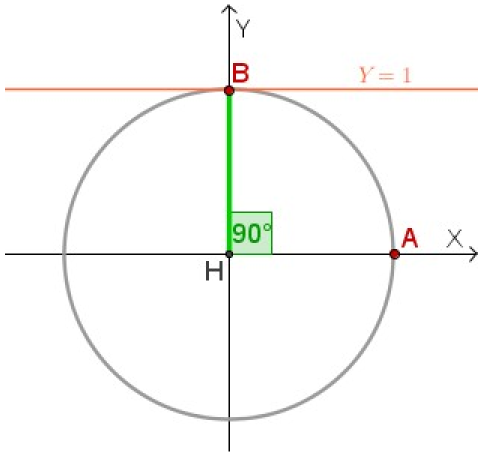
<u>Soluzione</u>

L'equazione è impossibile perché $-1 \leq sin\, x \leq 1$.

Esempio 4

$\boldsymbol{sin\, x \geq 1}$

<u>Soluzione</u>

La retta di equazione $Y = 1$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo:* $$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$$	
L'angolo $\alpha \in [0\,, 2\pi]$ *che soddisfa la disequazione è:*	$x = \frac{\pi}{2}$
*Pertanto le soluzioni della disequazione in **R** sono:*	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi}$

Esempio 5

$\boldsymbol{sin\, x} < 1$

<u>Soluzione</u>

La funzione $sin\, x$ *è tale che* $-1 \leq sin\, x \leq 1 \qquad \forall\, x \in R$	
Pertanto le soluzioni della disequazione sono tutti i valori reali ad eccezione di quelli per i quali $sin\, x = 1$.	
*Le soluzioni della disequazione in **R** sono quindi:*	$\forall\, \boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi}$

Esempio 6

$\boldsymbol{sin\, x} < -1$

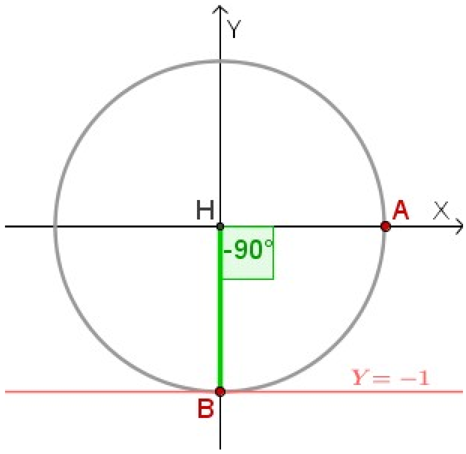
<u>Soluzione</u>

L'equazione è impossibile perché $-1 \leq sin\, x \leq 1$.

Esempio 7

$\boldsymbol{\sin x \leq -1}$

<u>*Soluzione*</u>

La retta di equazione $Y=-1$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo:* $$\alpha=-\frac{\pi}{2}=-90°$$	
L'angolo $\alpha \in [0\,,2\pi]$ *che soddisfa la disequazione è:*	$x=\frac{3}{2}\pi$
*Pertanto le soluzioni della disequazione in **R** sono:*	$\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{2}+2k\,\pi}$

Esempio 8

$\boldsymbol{\sin x} > -1$

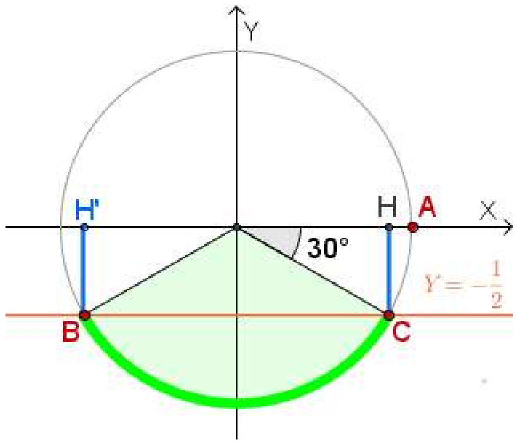
<u>*Soluzione*</u>

La funzione $\sin x$ *è tale che* $-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad \forall\, x \in R$	
Pertanto le soluzioni della disequazione sono tutti i valori reali ad eccezione di quelli per i quali $\sin x=-1$.	
*Le soluzioni della disequazione in **R** sono quindi:*	$\boldsymbol{\forall\, x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\,\pi}$

Esempio 8

$$\boldsymbol{\sin x \le -\frac{1}{2}}$$

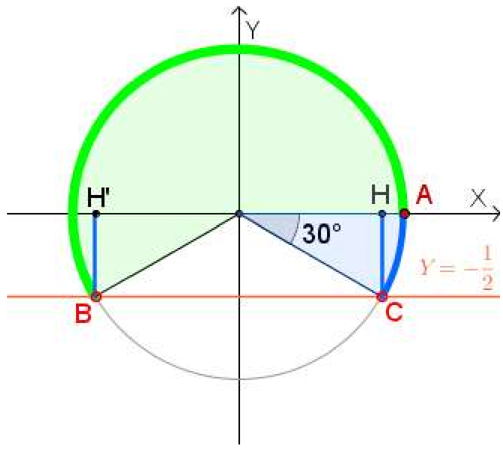
<u>*Soluzione*</u>

<table>
<tr><td>L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ è
$\alpha = -\frac{\pi}{6} = -30°$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>La retta di equazione $Y = -\frac{1}{2}$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:
$\alpha_1 = \frac{7}{6}\pi = 210°$ e $\alpha_2 = \frac{11}{6}\pi = 330°$.</td></tr>
<tr><td>Gli angoli $\alpha \in [0, 2\pi]$
che soddisfano la disequazione sono:</td><td>$\frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi$</td></tr>
<tr><td>Pertanto le soluzioni della disequazione in R sono:</td><td>$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi + 2k\pi}$</td></tr>
</table>

Esempio 9

$$\boldsymbol{\sin x > -\frac{1}{2}}$$

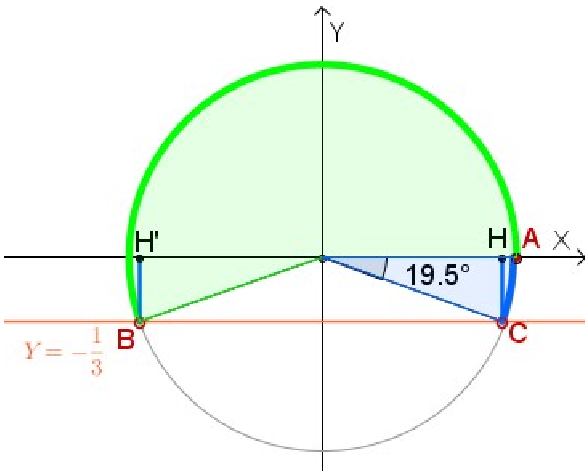
<u>*Soluzione*</u>

<table>
<tr><td>L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ è
$\alpha = -\frac{\pi}{6} = -30°$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>La retta di equazione $Y = -\frac{1}{2}$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:
$\alpha_1 = \frac{7}{6}\pi = 210°$ e $\alpha_2 = \frac{11}{6}\pi = 330°$.</td></tr>
<tr><td>Gli angoli $\alpha \in [0, 2\pi]$
che soddisfano la disequazione sono:</td><td>$0 \le x < \frac{7}{6}\pi \quad \vee \quad \frac{11}{6}\pi < x \le 2\pi$</td></tr>
<tr><td>Pertanto le soluzioni della disequazione in R sono:</td><td>$\boldsymbol{2k\pi \le x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi}$
$\vee$
$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi}$</td></tr>
</table>

Esempio 10

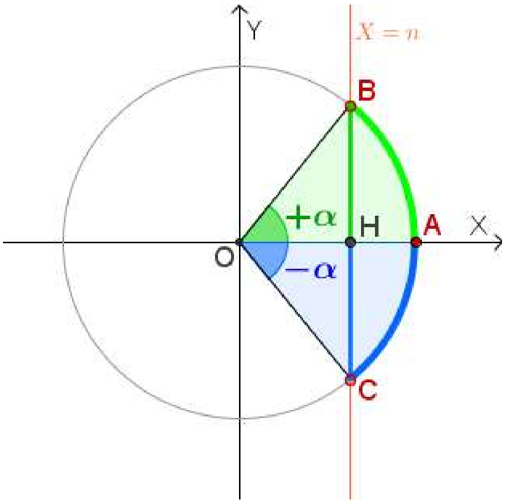
$\boldsymbol{\sin x > -\frac{1}{3}}$

<u>*Soluzione*</u>

Il valore $\frac{1}{3}$ *di* $\sin x$ *non è un valore noto.* *In questo caso per trovare l'angolo* α *si utilizza la funzione* $\arcsin n$. *L'angolo* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ *è:* $\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \cong -0{,}34\ rad \cong -19{,}5°$	
La retta di equazione $Y = -\frac{1}{3}$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 199{,}5°$ $\alpha_2 = 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 340{,}5°$.	
Gli angoli $\alpha \in [0, 2\pi]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$0 \le x < \pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \quad \vee \quad 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < x \le 2\pi$
Pertanto le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*	$\boldsymbol{2k\pi \le x < \pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi}$ $\vee$ $\boldsymbol{2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi}$

Una disequazione goniometrica elementare nella funzione coseno è una disequazione del tipo:

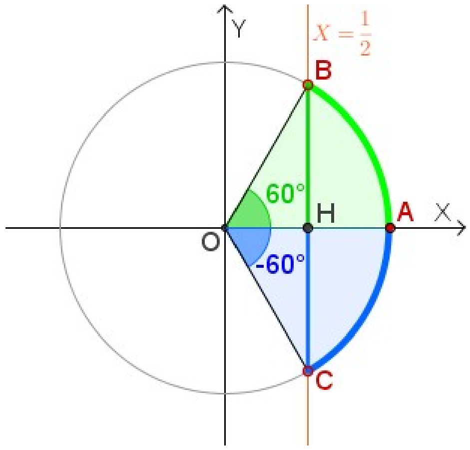
$$\boldsymbol{\cos x > n} \qquad \textit{oppure} \quad < 0 \ , \ \leq 0 \ , \ \geq 0$$

Soluzione	Rappresentazione grafica
La retta di equazione $X = n$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli: α e $-\alpha$. La disequazione, nell'intervallo $[0\,,2\pi]$, è soddisfatta per: $0 \leq x < \alpha \qquad \vee \qquad 2\pi - \alpha < x \leq 2\pi$ Le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ sono: $\boldsymbol{2k\,\pi \leq x < \alpha + 2k\,\pi \quad \vee \quad (2\pi - \alpha) + 2k\,\pi < x \leq 2\pi + 2k\,\pi}$	

Esempio 1

$$\boldsymbol{\cos x > \frac{1}{2}}$$

<u>*Soluzione*</u>

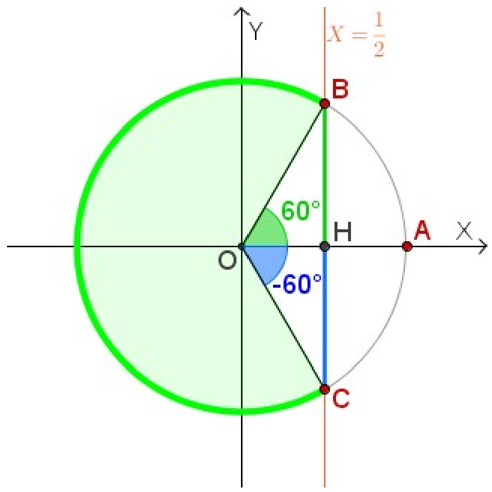
L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$	
La retta di equazione $X = \frac{1}{2}$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} = 60°$ *e* $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi = 300°$.	
Gli angoli $\alpha \in [0\,, 2\pi]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$0 \le x < \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$
*Pertanto le soluzioni della disequazione in **R** sono:*	$\boldsymbol{2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $\vee$ $\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi}$

Le soluzioni possono essere sintetizzate in:	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$

Esempio 2

$$\boldsymbol{\cos x \le \frac{1}{2}}$$

<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$	
La retta di equazione $X = \frac{1}{2}$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} = 60°$ *e* $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi = 300°$	
Gli angoli $\alpha \in [0\,, 2\pi]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5}{3}\pi$
*Pertanto le soluzioni della disequazione in **R** sono:*	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{5}{3}\pi + 2k\pi}$

Esempio 3

$\boldsymbol{cos\, x} > 1$

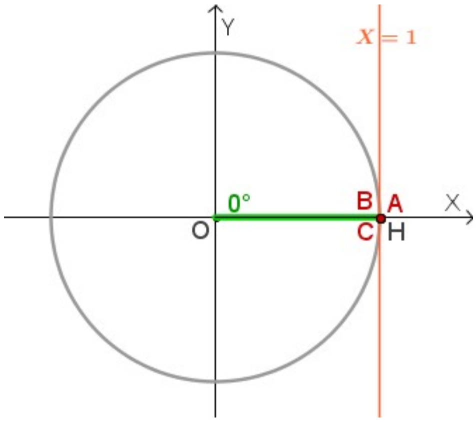
<u>*Soluzione*</u>

L'equazione è impossibile perché $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Esempio 4

$\boldsymbol{cos\, x \geq 1}$

<u>*Soluzione*</u>

La retta di equazione $X = 1$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo:* $\alpha = 0°$	
L'angolo $\alpha \in [0\,, 2\pi]$ *che soddisfa la disequazione è:*	$x = 0°$
Pertanto le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ *sono:*	$\boldsymbol{x = 2k\,\pi}$

Esempio 5

$\boldsymbol{cos\, x} < 1$

<u>*Soluzione*</u>

La funzione $\cos x$ *è tale che* $-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \forall\, x \in R$	
Pertanto le soluzioni della disequazione sono tutti i valori reali ad eccezione di quelli per i quali $\cos x = 1$.	
Le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ *sono quindi:*	$\boldsymbol{\forall\, x \neq 2k\,\pi}$

Esempio 6

$\boldsymbol{cos\, x} < -1$

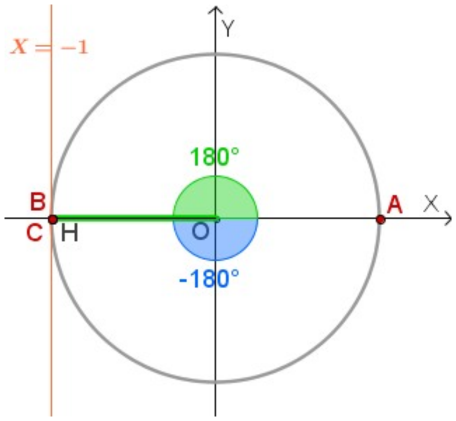
<u>*Soluzione*</u>

L'equazione è impossibile perché $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Esempio 7

$\boldsymbol{\cos x \leq -1}$

<u>*Soluzione*</u>

La retta di equazione $X = -1$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo:* $\alpha = \pi = 180°$	
L'angolo $\alpha \in [0\,, 2\pi]$ *che soddisfa la disequazione è:*	$x = \pi$
Pertanto le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ *sono:*	$\boldsymbol{x = \pi + 2k\,\pi}$

Esempio 8

$\boldsymbol{\cos x} > -1$

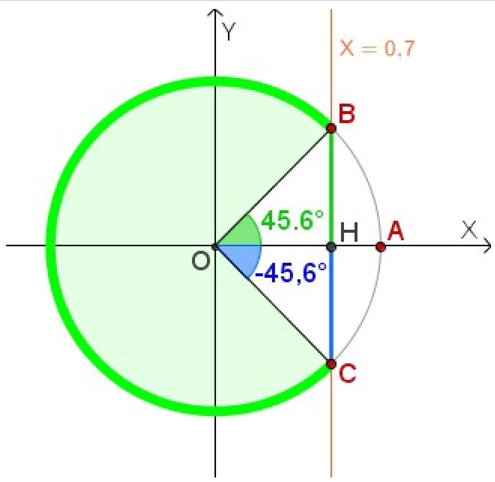
<u>*Soluzione*</u>

La funzione $\cos x$ *è tale che* $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall\, x \in R$	
Pertanto le soluzioni della disequazione sono tutti i valori reali ad eccezione di quelli per i quali $\cos x = -1$.	
Le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ *sono quindi:*	$\forall\, \boldsymbol{x \neq \pi + 2k\,\pi}$

Esempio 9

$\boldsymbol{\cos x \leq 0,7}$

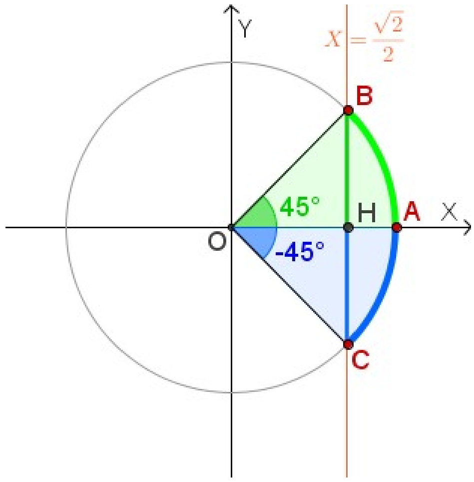
<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos \alpha = 0{,}7$ *è* $\alpha = arccos\, 0{,}7 \cong 0{,}80\, rad \cong 45{,}6°$	
La retta di equazione $X = 0{,}7$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = arccos\, 0{,}7 \cong 45{,}6°$ *e* $\alpha_2 = 2\pi - arccos\, 0{,}7 = 314{,}4°$.	
Gli angoli $\alpha \in [0\,, 2\pi]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$arccos\, 0{,}7 \leq x \leq 2\pi - arccos\, 0{,}7$
Pertanto le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ *sono:*	$\boldsymbol{arccos\, 0,7 + 2k\,\pi \quad \leq x \leq \quad 2\pi - arccos\, 0,7 + 2k\,\pi}$

Esempio 10

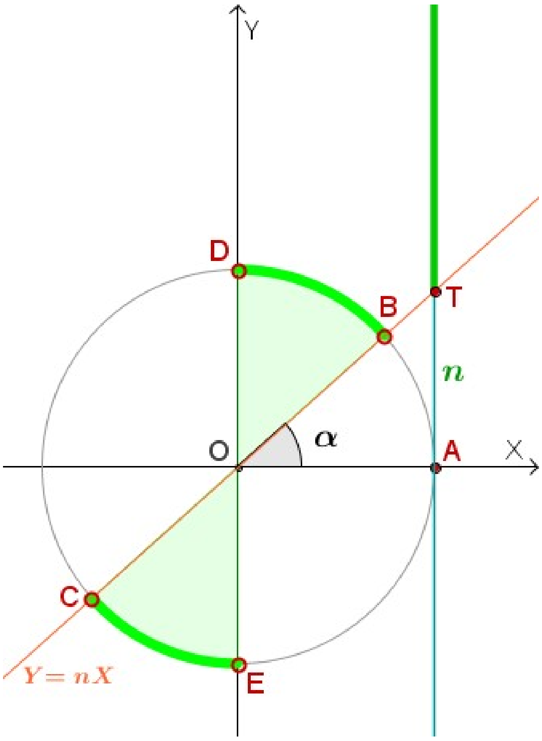
$$\boldsymbol{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo $x+\frac{\pi}{3}=z$ $\rightarrow$	$\cos z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
L'angolo $\alpha \in [0,\pi]$ *tale che* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *è* $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$	
La retta di equazione $X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} = 45°$ *e* $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi = 315°$	
Gli angoli $\alpha \in [0\,,2\pi]$ *che soddisfano la disequazione* $\cos z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ *sono:*	$-\frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{4}$
Gli angoli $\alpha \in [0\,,2\pi]$ *che soddisfano la disequazione* $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ *sono:*	$-\frac{\pi}{4} \leq x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4}$ *ossia* $-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ $-\frac{7}{12}\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12}$
Pertanto le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*	$\boldsymbol{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2k\pi}$

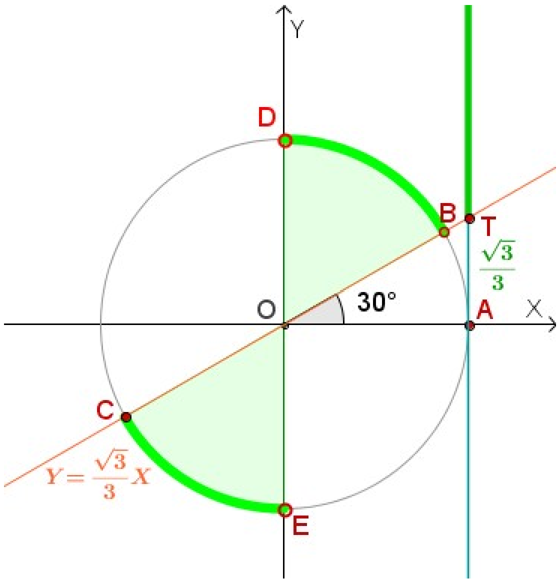
Una disequazione goniometrica elementare nella funzione coseno è una disequazione del tipo:

$$\boldsymbol{tan\,x} > n \qquad \textit{oppure} \quad < 0 \ , \ \leq 0 \ , \ \geq 0$$

Soluzione	Rappresentazione grafica
La funzione tangente ha periodo π. Pertanto iniziamo a risolvere la disequazione nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. La retta di equazione $Y = nX$ interseca la circonferenza goniometrica nei due punti B e C corrispondenti agli angoli: α e $\pi + \alpha$. La disequazione $\boldsymbol{tan\,x} > n$, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, è soddisfatta per: $$\alpha < x < \frac{\pi}{2}$$	
Le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ sono: $$\boldsymbol{\alpha + k\,\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\,\pi}$$	

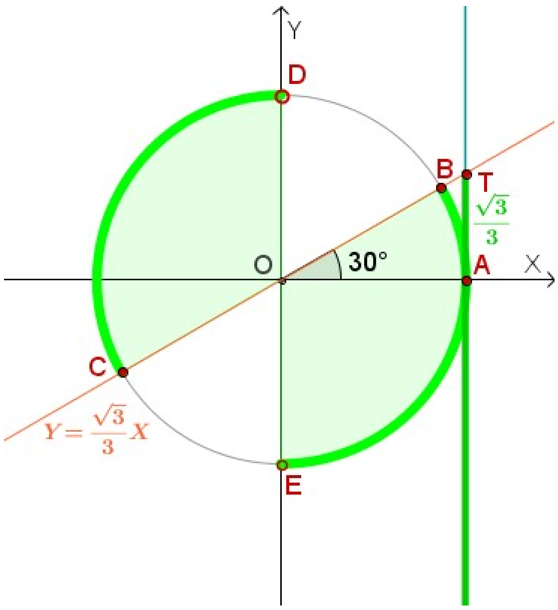
Esempio 1

$$\boldsymbol{tan\, x > \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

<table>
<tr><th>Soluzione</th><th>Rappresentazione grafica</th></tr>
<tr><td>L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ è
$$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$$</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>La retta di equazione $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}X$ interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$.
La disequazione $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, è soddisfatta per:
$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$$</td></tr>
<tr><td>Le soluzioni della disequazione in R sono:
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + k\,\pi < \; x < \frac{\pi}{2} + k\,\pi}$$</td></tr>
</table>

Esempio 2

$$\boldsymbol{tan\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

<table>
<tr><th>Soluzione</th><th>Rappresentazione grafica</th></tr>
<tr><td>L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ è
$$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$$</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>La retta di equazione $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}X$ interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$.
La disequazione $\tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, è soddisfatta per:
$$-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{6}$$</td></tr>
<tr><td>Le soluzioni della disequazione in R sono:
$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} + k\,\pi < \; x \leq \frac{\pi}{6} + k\,\pi}$$</td></tr>
</table>

Esempio 3

$\tan x \leq 2$

<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\tan x = 2$ *è*

$$\alpha = \arctan 2 \cong 1{,}11\ rad \cong 63{,}4°$$

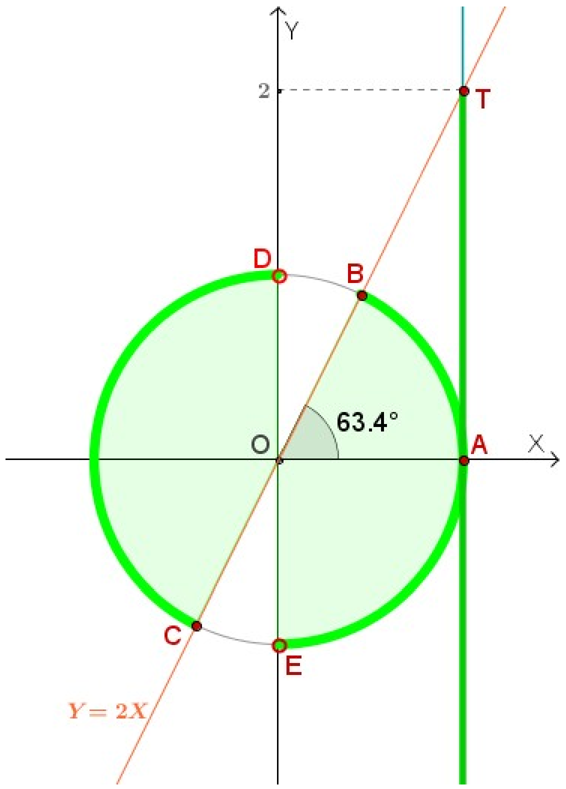
La retta di equazione $Y = 2X$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo* $\alpha = \arctan 2 \cong 63{,}4°$.

La disequazione $\tan x \leq 2$, *nell'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *è soddisfatta per:*

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq \arctan 2$$

Le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*

$$-\frac{\pi}{2} + k\,\pi < x \leq \arctan 2 + k\,\pi$$



Esempio 4

$\tan x \geq 0$

<u>*Soluzione*</u>

L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\tan x = 0$ *è*

$$\alpha = 0°$$

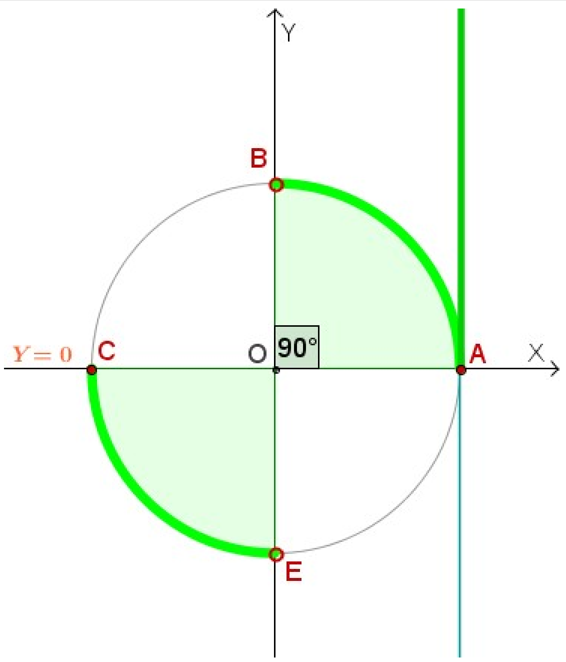
La retta di equazione $Y = 0$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto A corrispondente all'angolo* $\alpha = 0°$.

La disequazione $\tan x \geq 0$, *nell'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *è soddisfatta per:*

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

Le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*

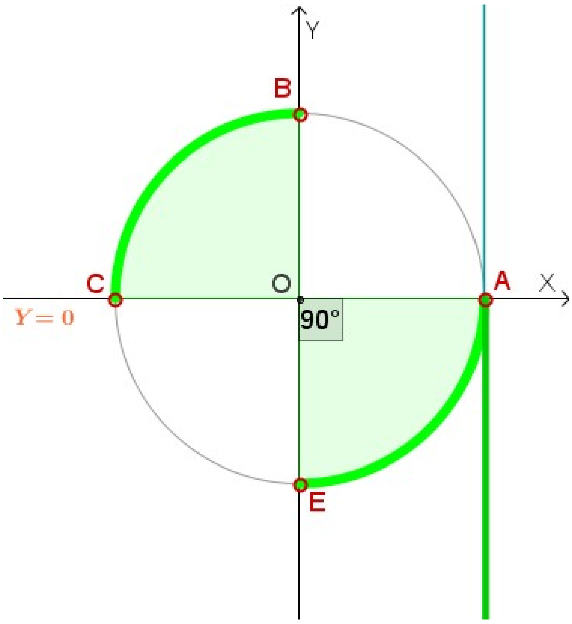
$$k\,\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$



Esempio 5

$\boldsymbol{tan\ x} < 0$

<u>*Soluzione*</u>

<table>
<tr><td>L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\tan x = 0$ è
$\alpha = 0°$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>La retta di equazione $Y = 0$ interseca la circonferenza goniometrica nel punto A corrispondente all'angolo $\alpha = 0°$.

La disequazione $\tan x < 0$, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, è soddisfatta per:
$$-\frac{\pi}{2} < x < 0$$</td></tr>
<tr><td>Le soluzioni della disequazione in R sono:
$$-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k\,\pi} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{k\,\pi}$$</td></tr>
</table>

Esempio 6

$\boldsymbol{tan\ 2x} \leq 0$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo $2x = z \quad \rightarrow \quad tan\ z \leq 0$

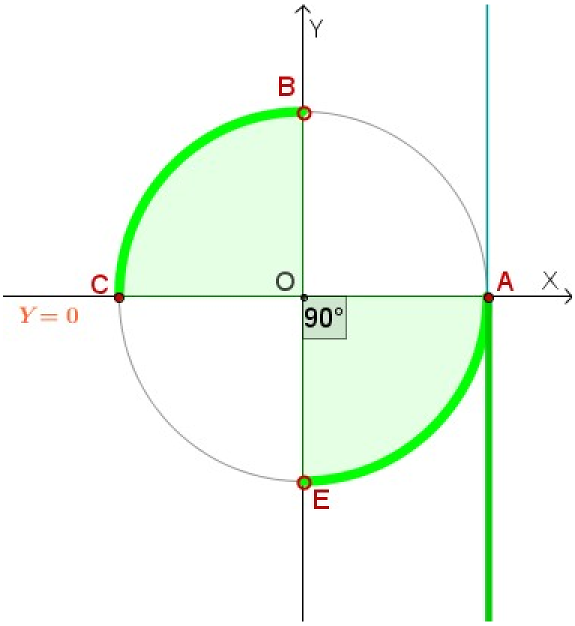
L'angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $tan\ z = 0$ *è*

$$\alpha = 0°$$

La retta di equazione $Y = 0$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto A corrispondente all'angolo* $\alpha = 0°$.

La disequazione $tan\ z \leq 0$*, nell'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *è soddisfatta per:*

$$-\frac{\pi}{2} < z \leq 0$$



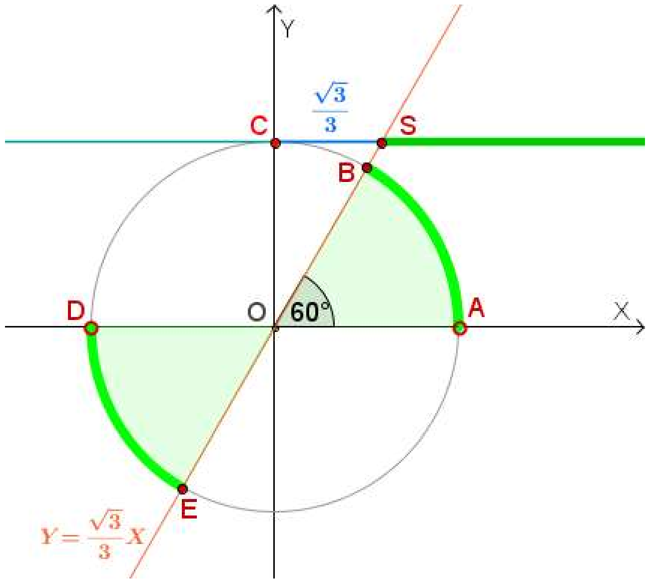
Le soluzioni della disequazione $tan\ z \leq 0$ *in* $\boldsymbol{R}$ *sono:*	$-\frac{\pi}{2} + k\,\pi < z \leq k\,\pi$
Sostituiamo $2x = z$	$-\frac{\pi}{2} + k\,\pi < 2x \leq k\,\pi$
Le soluzioni della disequazione in $\boldsymbol{R}$ *sono:*	$\boldsymbol{-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq k\frac{\pi}{2}}$
Le soluzioni della disequazione, per come si evince dalla seguente tabella, possono essere esplicitate con:	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}}$

Esercizio 881.533							
	Soluzione (I modo)				Soluzione (II modo)		
k	45°+ k90°	< x <=	90°+ k90°		-45°+ k90°	< x <=	k90°
-8	-675	< x <=	-630		-765	< x <=	-720
-7	-585	< x <=	-540		-675	< x <=	-630
-6	-495	< x <=	-450		-585	< x <=	-540
-5	-405	< x <=	-360		-495	< x <=	-450
-4	-315	< x <=	-270		-405	< x <=	-360
-3	-225	< x <=	-180		-315	< x <=	-270
-2	-135	< x <=	-90		-225	< x <=	-180
-1	-45	< x <=	0		-135	< x <=	-90
0	45	< x <=	90		-45	< x <=	0
1	135	< x <=	180		45	< x <=	90
2	225	< x <=	270		135	< x <=	180
3	315	< x <=	360		225	< x <=	270
4	405	< x <=	450		315	< x <=	360
5	495	< x <=	540		405	< x <=	450
6	585	< x <=	630		495	< x <=	540
7	675	< x <=	720		585	< x <=	630
8	765	< x <=	810		675	< x <=	720

Esempio 7

$\boldsymbol{3\cot x-\sqrt{3}\geq 0}$

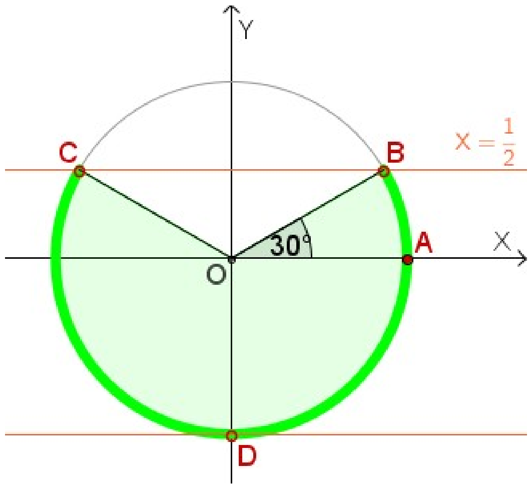
<u>Soluzione</u>

Trasformiamo l'equazione in forma canonica:	$\cot x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$
L'angolo $\alpha\in(-\pi,\pi)$ *tale che* $\cot x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *è* $\alpha=\frac{\pi}{3}=60°$ *La retta di equazione* $Y=\frac{\sqrt{3}}{3}X$ *interseca la circonferenza goniometrica nel punto B corrispondente all'angolo* $\alpha=\frac{\pi}{3}=60°$. *La disequazione* $\tan x\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$, *nell'intervallo* $(-\pi,\pi)$, *è soddisfatta per:* $0<x\leq\frac{\pi}{3}$	
Le soluzioni della disequazione in R sono:	$\boldsymbol{k\pi<x\leq\frac{\pi}{3}+k\pi}$

Esempio 1

$\boldsymbol{2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0}$

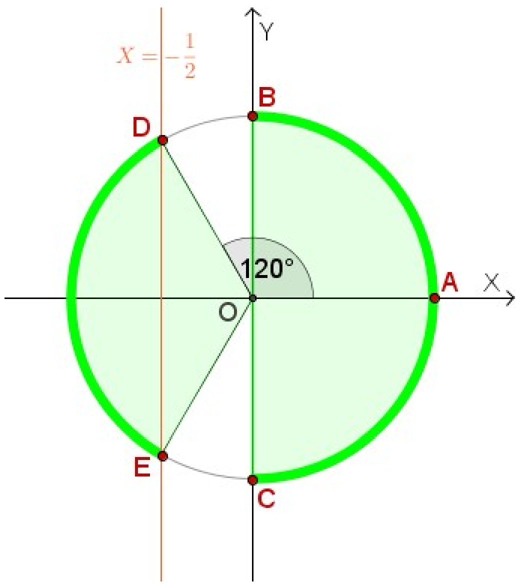
Soluzione

Poniamo $\sin x = z \quad \rightarrow$	$2z^2 + z - 1 < 0$
Risolviamo l'equazione:	$2z^2 + z - 1 = 0 \qquad \Delta = 1 + 8 = 9 \qquad z_{1,2} = \frac{-1\mp 3}{4} = \begin{cases} z_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \\ z_2 = \frac{-1+3}{4} = +\frac{1}{2} \end{cases}$
Le soluzioni della disequazione $2z^2 + z - 1 < 0$ *sono:*	$-1 < z < \frac{1}{2}$
Sostituiamo $\sin x = z$	$-1 < \sin x < \frac{1}{2}$
L'angolo $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin \alpha_1 = -1$ *è* $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} = -90°$ *L'angolo* $\alpha_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\sin \alpha_2 = \frac{1}{2}$ *è* $\alpha_2 = \frac{\pi}{6} = 30°$	
Le rette di equazioni $Y = -1$ *e* $Y = \frac{1}{2}$ *intersecano la circonferenza goniometrica nei punti B, C, D corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \frac{\pi}{6} = 30°$ $\alpha_2 = -\frac{7}{6}\pi = 150°$ $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi = 270°$	
Gli angoli $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6} \qquad \wedge \qquad x \neq \frac{3}{2}\pi$
Pertanto le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*	$\boldsymbol{-\frac{7}{6}\pi + 2k\,\pi \ < \ x < \ \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \qquad \wedge \qquad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\,\pi}$

Esempio 2

$\boldsymbol{2\cos^2 x + \cos x} \geq 0$

Soluzione

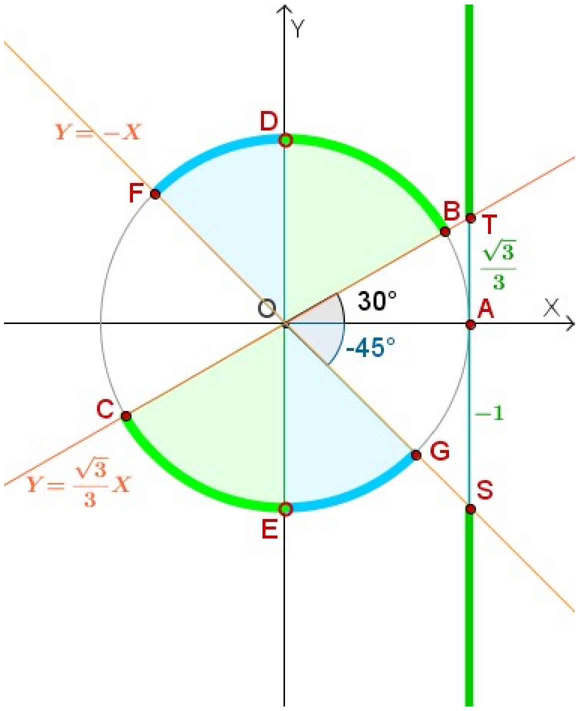
Poniamo $\cos x = z \quad \rightarrow$	$2z^2 + z \geq 0$
Risolviamo l'equazione:	$2z^2 + z = 0 \qquad z \cdot (2z+1) = 0 \qquad \begin{matrix} z = 0 \\ 2z + 1 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} z = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{matrix}$
Le soluzioni della disequazione $2z^2 + z \geq 0$ *sono:*	$z \leq -\dfrac{1}{2} \quad \vee \quad z \geq 0$
Sostituiamo $\cos x = z$	$\cos x \leq -\dfrac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x \geq 0$
L'angolo $\alpha_1 \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos \alpha_1 = 0$ *è* $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} = 90°$ *L'angolo* $\alpha_2 \in [0, \pi]$ *tale che* $\cos \alpha_2 = -\frac{1}{2}$ *è* $\alpha_2 = \frac{2}{3}\pi = 120°$	
Le rette di equazioni $Y = 0$ *e* $Y = -\frac{1}{2}$ *intersecano la circonferenza goniometrica nei punti B, C, D, E corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2} = 90°$ $\alpha_2 = -\dfrac{\pi}{2} = -90°$ $\alpha_3 = \dfrac{2}{3}\pi = 120°$ $\alpha_4 = \dfrac{4}{3}\pi = 240°$	
Le soluzioni della disequazione in $[0\,, 2\pi]$ *sono:*	$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \quad \vee \quad \dfrac{2}{3}\pi \leq x \leq \dfrac{4}{3}\pi$
Pertanto le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*	$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ \leq x \leq \ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \leq x \leq \ \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi}$

Esempio 3

$$3\tan^2 x - (\sqrt{3}-3)\tan x - \sqrt{3} \geq 0$$

Soluzione

Soluzione

Poniamo $\tan x = z \quad \rightarrow$	$3z^2 - (\sqrt{3}-3)z - \sqrt{3} \geq 0$
Risolviamo l'equazione:	$3z^2 - (\sqrt{3}-3)z - \sqrt{3} = 0$ $\Delta = \left[-(\sqrt{3}-3)\right]^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-\sqrt{3}) = 3 + 9 - 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} =$ $= 3 + 9 + 6\sqrt{3} = (\sqrt{3}+3)^2$ $z_{1,2} = \dfrac{(\sqrt{3}-3) \mp \sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-3-(\sqrt{3}+3)}{6} = \dfrac{-3-3}{6} = -1 \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-3+(\sqrt{3}+3)}{6} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$
Le soluzioni della disequazione $3z^2 - (\sqrt{3}-3)z - \sqrt{3} \geq 0$ *sono:*	$z \leq -1 \quad \vee \quad z \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
Sostituiamo $\tan x = z$	$\tan x \leq -1 \quad \vee \quad \tan x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
L'angolo $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\tan \alpha_1 = -1$ *è* $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} = -45°$ *L'angolo* $\alpha_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che* $\tan \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *è* $\alpha_2 = \frac{\pi}{6} = 30°$	
Le rette di equazioni $Y = -X$ *e* $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}X$ *intersecano la circonferenza goniometrica nei punti B, D, E, G corrispondenti agli angoli:* $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{6} = 30°$ $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} = 150°$ $\alpha_3 = \dfrac{3}{2}\pi = 270°$ $\alpha_4 = -\dfrac{\pi}{4} = 45°$	
Gli angoli $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *che soddisfano la disequazione sono:*	$-\dfrac{\pi}{2} < x \leq -\dfrac{\pi}{4} \quad \vee \quad \dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$
Pertanto le soluzioni della disequazione in ***R*** *sono:*	$-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad \dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Le soluzioni possono essere sintetizzate in:	$\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \dfrac{3}{4}\pi + k\pi \quad \wedge \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$