Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio è il ramo della matematica che studia i modi per raggruppare e/o ordinare secondo date regole gli elementi di un insieme finito di oggetti.

Fattoriale

Il prodotto dei numeri interi positivi da 1 a n si scrive: $\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \cdot n}$ e si legge n fattoriale.

Per convenzione: $0! = 1$ $\qquad\qquad$ $1! = 1$

Approssimazione di Stirling

Se n è molto grande, $n! \approx \sqrt{2 \pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ $\quad$ (*Approssimazione di Stirling*)

Disposizioni

Una disposizione di n oggetti di classe k $(k \le n)$ è il numero di modi in cui si possono disporre gli n oggetti distinti in gruppi (*file*) di k elementi, in maniera tale che ogni gruppo differisca dagli altri per la natura degli oggetti o per il loro ordine.

Il numero di disposizione di n oggetti di classe k è: $\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

Esempio 1

Date le 21 lettere dell'alfabeto, quante parole di 4 lettere distinte si possono formare ?

Soluzione

Il numero di parole che si possono formare è: $D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143.640$.

Esempio 2

Ad una gara partecipano 5 atleti: x, y, z, k, w. *In quanti modi si può presentare l'arrivo dei primi tre atleti ?*

Soluzione

I° posto	*II° posto*	*III° posto*
x	*y*	*z*
		k
		w
	z	*y*
		k
		w
	k	*y*
		z
		w
	w	*y*
		z
		k

E' evidente che ci sono altre 4 tabelle di questo tipo per le lettere y, z, k, w, da considerare come I° posto.
Il numero dei podi possibili sono pertanto $5 \cdot 12 = 60$. Cioè: $D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Esempio 3

Quanti sono i numeri di 2 cifre tutte distinte che si possono formare con le 4 cifre: 1, 2, 3, 4 ?

Soluzione $\qquad D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \qquad \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$.

Disposizioni con ripetizioni

Una disposizione con ripetizione è una disposizione che può avere anche ripetizioni di uno stesso elemento.

Il numero di disposizione con ripetizione, di n oggetti di classe k è: $\boxed{D^I{}_{n,k} = n^k}$.

Esempio 1

Quanti numeri di 3 cifre, anche ripetute, si possono formare con le cifre 5, 6, 7, 8 ?

Soluzione

$D^I{}_{4,3} = 4^3 = 64$

Essi sono:

I° posto	II° posto	III° posto
5	6	7
		8
	7	6
		8
	8	6
		7

É evidente che ci sono altre 3 tabelle di questo tipo per i numeri 6, 7, 8, da considerare al I° posto.
Pertanto si hanno $4 \cdot 6 = 24$ gruppi.
A questi vanno aggiunti i gruppi con le ripetizioni:

	con 3 cinque	con 2 cinque	con 1 cinque
I gruppi che iniziano per 5 sono:	555	556	566
		557	577
		558	588
		565	
		575	
		585	

E' evidente che ci sono altre 3 tabelle di questo tipo per i numeri 6, 7, 8, da considerare al I° posto.
Pertanto si hanno altri $4 \cdot 10 = 40$ gruppi.
In totale si hanno pertanto: $40 + 24 = 64$ gruppi.

Esempio 2

Quanti sono i numeri di 2 cifre che si possono formare con le 4 cifre: 1, 2, 3, 4 ?

Soluzione

$D^I{}_{4,2} = 4^2 = 16$ $\{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43, + 11, 22, 33, 44\}$

Esempio 3

Quanti terne di numeri si possono ottenere lanciando 3 dadi ?

Soluzione

Anche in questo caso si hanno ripetizioni del tipo: (3; 3 ; 3), (3; 4; 4), …
Tale numero è dato da: $D^I{}_{6,3} = 6^3 = 216$

Esempio 4

Quante sono le colonne possibili che si possono giocare al totocalcio ?

Soluzione

$D^I{}_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323$

Permutazioni

Una permutazione è una disposizione in cui $k = n$. Cioè i gruppi sono formati da tutti gli n elementi.
I gruppi pertanto differiscono solo per l'ordine degli elementi e non per la loro natura (visto che i gruppi sono formati tutti dagli stessi n elementi).
Il numero di permutazioni di n oggetti è: $\boxed{P_n = n!}$

Osservazioni

Si osservi che: $P_n = D_{n,n}$.   Infatti: $D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n$

Esempio 1

In quanti modi diversi 4 persone A, B, C, D possono sedersi sui 4 sedili di un auto a 4 posti ?

Soluzione

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Esempio 2

Quanti sono i numeri di 4 cifre tutte distinte che si possono formare con le 4 cifre: 1, 2, 3, 4 ?

Soluzione

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321} .

Permutazioni con ripetizioni

Il numero delle permutazioni di n oggetti di cui h uguali tra loro, k uguali tra loro e distinti dai precedenti, … , p uguali tra loro e distinti dai precedenti (con $h + k + ... + p = n$) è : $\boxed{P'_{n,h,k...p} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdots p!}}$

Esempio 1

Calcolare il numero di anagrammi, anche privi di significato, che si possono formare con la parola coro.

Soluzione

Occorre calcolare le permutazioni con ripetizione di 4 elementi dei quali la lettera o è ripetuta 2 volte:

$P'_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$.

Esse sono:

La coppia delle due 'o' si trova nella posizione:					
1,2	*1,3*	*1,4*	*2,2*	*2,3*	*3,4*
oocr	*ocor*	*ocro*	*coor*	*coro*	*croo*
oorc	*oroc*	*orco*	*rooc*	*roco*	*rcoo*

Esempio 2

Calcolare il numero di anagrammi, anche privi di significato, che si possono formare con la parola caraffa.

Soluzione

Occorre calcolare le permutazioni con ripetizione di 7 elementi dei quali la lettera a *è ripetuta 3 volte e la lettera* f *è ripetuta 2 volte:*

$P'_{7,3,2} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 420$.

Combinazioni

Una combinazione di n oggetti di classe k $(k \le n)$ è il numero di modi in cui si possono disporre gli n oggetti in gruppi di k elementi, in maniera tale che ogni gruppo differisca dagli altri per la natura degli oggetti e non per il loro ordine.

Il numero di combinazioni di n oggetti di classe k è: $\boxed{C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}}$

oppure $\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$

Osservazioni

Si osservi che:

- $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ *coefficiente binomiale*
- $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$

Esempio 1

Calcolare il numero delle cinquine che si possono fare in una tombola.

<u>Soluzione</u>

Poiché l'ordine di estrazione dei numeri non ha alcuna importanza, si tratta di combinazioni semplici.

$$C_{90,5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43.949.268\,.$$

Esempio 2

Quanti terni si possono formare con i 90 numeri del gioco del Lotto ?

<u>Soluzione</u>

Poiché l'ordine di estrazione dei numeri non ha alcuna importanza, si tratta di combinazioni semplici.

$$C_{90,3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117.480\,.$$

Esempio 3

In un torneo quadrangolare di calcio, ogni squadra affronta le altre in una partita di sola andata. Nel torneo quante partite vengono disputate ?

<u>Soluzione</u>

$C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ *Infatti dal tabellone si hanno le sei partite:*

Juve - Milan	*Juve - Inter*	*Juve – Roma*
	Milan - Inter	*Milan – Roma*
		Inter - Roma

Esempio 4

Calcola il numero di strette di mano che si possono effettuare fra 6 persone.

<u>Soluzione</u>

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15\,.$$

Combinazioni con ripetizione

Una combinazione con ripetizione è una combinazione che può avere anche ripetizioni di uno stesso elemento.

Il numero di combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k è: $\boxed{C'_{n,k} = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+k-1)}{k\,!}}$

(In questo caso k può essere maggiore, minore o uguale ad n)

Esempio 1

Le combinazioni con ripetizione dei 3 oggetti x , y e z presi 4 alla volta sono:

<u>Soluzione</u>

$$C'_{3,4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4\,!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

x x x x	x y y y	x z z z	y z z z	x x y z
y y y y	x x y y	x x z z	y y z z	y y x z
z z z z	x x x y	x x x z	y y y z	z z x y

Esempio 2

Le combinazioni con ripetizione dei 3 numeri: 1, 2 e 3 presi 2 alla volta sono:

<u>Soluzione</u>

$$C'_{3,2} = \frac{3 \cdot 4}{2\,!} = 6$$

1 1	1 2	1 3	2 2	2 3	3 3

Esempio 3

Le combinazioni con ripetizione dei 2 simboli : 0, 1 presi 2 alla volta sono:

<u>Soluzione</u>

$C'_{2,2} = \dfrac{2 \cdot 3}{2\,!} = 3$. *Esse sono:* 0 0 0 1 11.

Esempio 4

Le combinazioni con ripetizione delle quattro cifre 1,2,3,4, prese 2 alla volta sono :

<u>Soluzione</u>

$C'_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$. *Esse sono:* 12 , 13, 14 , 23 , 24 , 34 , 11 , 22 , 33 , 44 .

In sintesi

Disposizioni semplici	I gruppi differiscono per l'ordine degli elementi e per la loro natura	$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Disposizioni con ripetizioni		$D'_{n,k} = n^k$
Permutazioni semplici	I gruppi differiscono solo per l'ordine degli elementi	$P_n = n\,!$
Permutazioni con ripetizioni		$P'_{n,h,k\ldots p} = \dfrac{n\,!}{h\,! \cdot k\,! \cdots p\,!}$
Combinazioni	I gruppi differiscono solo per la natura degli elementi	$C_{n,k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k\,!}$
Combinazioni con ripetizioni		$C'_{n,k} = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+k-1)}{k\,!}$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 1

Dieci alpinisti, per attraversare un ghiacciaio, si legano in cordata, in modo però che due di loro, che sono principianti, non siano né al primo né all'ultimo posto. In quanti modi diversi possono farlo ?

<u>Soluzione</u>

no									no

Determiniamo innanzitutto, in quanti modi è possibile inserire l'alpinista principiante A e l'alpinista principiante B nelle 8 celle dalla 2 alla 9 (la cella 1 e la cella 10 non possono essere utilizzate perché principianti). Questi sono quante le disposizioni di 8 alpinisti presi 2 alla volta, cioè: $D_{8,2}$.

Dopo aver sistemato i due alpinisti principianti, occorre sistemare gli altri 8 alpinisti negli altri 8 posti disponibili. Il numero di queste sistemazioni è dato da: $D_{8,8} = P_8 = 8!$.

In definitiva il numero delle diverse cordate sono : $D_{8,2} \cdot P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.257.920$.

Esercizio 2

Quanti sono i numeri di 8 cifre che si possono scrivere senza utilizzare lo zero ? Fra essi sono in numero maggiore quelli in cui compare la cifra 1, o quelli in cui non compare ?

<u>Soluzione</u>

Se eliminiamo lo zero le cifre a disposizione sono 9. Con queste nove cifre i numeri (raggruppamenti) di 8 cifre sono: $D^{I}_{9,8} = 9^8 = 43.046.721$.

Di questi quelli che non contengono il numero 1 sono i raggruppamenti di 8 cifre con le 8 cifre: 2,3,4,5,6,7,8,9 (non c'è il numero 1 e lo 0): $D^{I}_{8,8} = 8^8 = 16.777.216$.

Mentre i numeri che contengono il numero 1 sono: $D^{I}_{9,8} - D^{I}_{8,8} = 43.046.721 - 16.777.216 = 26.269.505$.

Pertanto sono in numero maggiore quelli che contengono il numero 1.

Esercizio 3

Si devono suddividere 33 ragazzi per formare tre squadre di calcio. In quanti modi diversi lo si può fare ?

<u>Soluzione</u>

Occorre fare dei raggruppamenti di 11 elementi con i 33 a disposizione . Si intuisce che i gruppi sono differenti solo per natura e non per ordine.

Pertanto essi sono:

$$C_{33,11} = \frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = 31 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 23 = 193.536.720 \ .$$