CALCOLO COMBINATORIO

Esempio 1

Date le 21 lettere dell'alfabeto, le disposizioni $D_{21,4}$ *sono del tipo:*

a, b, c, d	a, c, d, b	d, a, b, c	cambia l'ordine degli oggetti
a, b, c, d	a, b, c, e	a, b, c, f	cambia almeno un oggetto

Il loro numero è: $D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143640$.

Esempio 2

Ad una gara partecipano 5 concorrenti: x, y, z, k, w. In quanti modi il gruppo dei primi tre del podio si può presentare ?

Soluzione

I° posto	*II° posto*	*III° posto*
x	*y*	*z*
		k
		w
	z	*y*
		k
		w
	k	*y*
		z
		w
	w	*y*
		z
		k

E' evidente che ci sono altre 4 tabelle di questo tipo per le lettere y, z, k, w, da considerare come I° posto.

Il numero dei podi possibili sono pertanto $5 \cdot 12 = 60$ *. Cioè:* $D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Esempio 3

Quanti numeri di 3 *cifre, anche ripetute, si possono formare con le cifre 5, 6, 7, 8 ?*

Soluzione

$D'_{4,3} = 4^3 = 64$

Essi sono:

I° posto	*II° posto*	*III° posto*
5	*6*	*7*
		8
	7	*6*
		8
	8	*6*
		7

E' evidente che ci sono altre 3 tabelle di questo tipo per i numeri 6, 7, 8, da considerare al I° posto.

Pertanto si hanno $4 \cdot 6 = 24$ *gruppi.*

A questi vanno aggiunti i gruppi con le ripetizioni:

I gruppi che iniziano per 5 sono:	*con 3 cinque*	*con 2 cinque*	*con 1 cinque*
	555	*556*	*566*
		557	*577*
		558	*588*
		565	
		575	
		585	

È evidente che ci sono altre 3 tabelle di questo tipo per i numeri 6, 7, 8, da considerare al I° posto.

Pertanto si hanno altri $4 \cdot 10 = 40$ *gruppi. In totale si hanno pertanto:* $40 + 24 = 64$ *gruppi.*

Esempio 4

Quanti terne di numeri si possono ottenere lanciando 3 *dadi ?*

Soluzione

Anche in questo caso si hanno ripetizioni del tipo: (3; 3 ; 3), (3; 4; 4), ...

Tale numero è dato da: $D'_{6,3} = 6^3 = 216$

Esempio 5

In quanti modi diversi 4 persone A, B, C, D si possono sedersi sui 4 sedili di un auto a 4 posti ?

Soluzione

$P_4 = 4! \;=\; 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 24 .$

Esempio 6

Calcolare il numero di anagrammi, anche privi di significato, che si possono formare con la parola coro.

Soluzione

Occorre calcolare le permutazioni con ripetizione di 4 elementi dei quali la lettera o è ripetuta 2 volte:

$$P'_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12 .$$

Esse sono:

La coppia delle due 'o' si trova nella posizione:					
1,2	1,3	1,4	2,2	2,3	3,4
oocr	ocor	ocro	coor	coro	croo
oorc	oroc	orco	rooc	roco	rcoo

Esempio 7

Calcolare il numero di anagrammi, anche privi di significato, che si possono formare con la parola caraffa.

Soluzione

Occorre calcolare le permutazioni con ripetizione di 7 elementi dei quali la lettera a è ripetuta 3 volte e la lettera f è ripetuta 2 volte:

$$P'_{7,3,2} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 420 .$$

Esempio 8

Calcolare il numero delle cinquine che si possono fare in una tombola.

Soluzione

$$C_{90,5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43949268 .$$

Esempio 9

In un torneo quadrangolare di calcio, ogni squadra affronta le altre in una partita di sola andata. Nel torneo quante partite vengono disputate ?

Soluzione

$C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \;=\; 6 .$ *Infatti dal tabellone si hanno le sei partite:*

Juve - Milan	Juve - Inter	Juve – Roma
	Milan - Inter	Milan – Roma
		Inter - Roma

Esempio 10

Calcola il numero di strette di mano che si possono effettuare fra 6 persone.

Soluzione

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

Esempio 11

Le combinazioni con ripetizione dei 3 oggetti x, y e z presi 4 alla volta sono:

$$C'_{3,4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

x x x x	x y y y	x z z z	y z z z	x x y z
y y y y	x x y y	x x z z	y y z z	y y x z
z z z z	x x x y	x x x z	y y y z	z z x y

Esempio 12

Le combinazioni con ripetizione dei 3 numeri 1, 2 e 3 presi 2 alla volta sono:

$$C'_{3,2} = \frac{3 \cdot 4}{2!} = 6$$

1 1	1 2	1 3	2 2	2 3	3 3

Esempio 13

Le combinazioni con ripetizione dei 2 simboli 0, 1 presi 2 alla volta sono:

$$C'_{2,2} = \frac{2 \cdot 3}{2!} = 3$$

Esse sono: 00 01 11.