XXXIII Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 5 maggio 2017

1. Siano a e b due numeri reali positivi. Consideriamo un esagono regolare di lato a, e costruiamo sui suoi lati sei rettangoli di lati a e b, disposti esternamente all'esagono. I dodici nuovi vertici giacciono su una circonferenza. Ripetiamo l'operazione precedente, ma scambiando fra loro i valori di a e b: ossia, partiamo da un esagono regolare di lato b e costruiamo su di esso, sempre esternamente all'esagono, sei rettangoli di lati a e b. Otteniamo che i dodici nuovi vertici giacciono su una seconda circonferenza.

Dimostrare che le due circonferenze hanno lo stesso raggio.

Prima Soluzione: Consideriamo il primo esagono, e chiamiamo O il suo centro, MN un suo lato, e $MNPQ$ il rettangolo costruito su MN. Il raggio della circonferenza che passa per i vertici esterni è OQ. Siccome l'esagono è regolare, OMN è un triangolo equilatero, e quindi $MN = OM = a$, e l'angolo OMN misura $60°$. Quindi l'angolo OMQ misura $60° + 90° = 150°$. Il triangolo OMQ ha quindi due lati di lunghezze $OM = a$ e $MQ = b$, e l'angolo compreso di $150°$.

Consideriamo ora il secondo esagono, con centro O', lato $M'N'$ e rettangolo $M'N'P'Q'$, analogamente al primo caso. Il raggio della seconda circonferenza è quindi $O'Q'$. Lo stesso ragionamento mostra che il triangolo $O'M'Q'$ ha due lati di lunghezze $O'M' = b$ e $M'Q' = a$, e l'angolo compreso $O'M'Q'$ misura $150°$.

Per il primo criterio di congruenza dei triangoli, OMQ e $O'M'Q'$ sono congruenti, e quindi $O'Q' = OQ$.

Seconda Soluzione: Siano O il centro della circonferenza, $MNPQ$ uno dei sei rettangoli, dove MN è un lato dell'esagono regolare e PQ è una corda della circonferenza. Sianmo poi R il punto medio di MN ed S il punto medio di PQ. Il raggio della circonferenza è evidentemente uguale a OP. Per il teorema di Pitagora,

$$r^2 = OS^2 + SP^2 = (OR + b)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

È facile verificare che $OR = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (altezza di un triangolo equilatero di lato a), quindi

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + b\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \sqrt{3}ab + b^2.$$

Poiché questa espressione rimane la stessa se si scambiano fra loro a e b, si ha la tesi.

2. Sia $n \geq 2$ un numero intero. Consideriamo le soluzioni (a, b, c) del sistema di equazioni

$$\begin{cases} n = a + b - c \\ n = a^2 + b^2 - c^2, \end{cases}$$

dove a, b, c sono numeri interi. Dimostrare che c'è almeno una soluzione e che ci sono un numero finito di soluzioni.

Soluzione: Dalla prima equazione ricaviamo $c = a + b - n$; sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$n = a^2 + b^2 - (a + b - n)^2 = -2ab + 2an + 2bn - n^2.$$

Riarrangiando, si ottiene

$$(a - n)(b - n) = ab - na - nb + n^2 = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il membro di destra è sempre un intero, perché uno tra n e $n - 1$ è sempre pari. Le soluzioni dell'equazione corrispondono ai modi di fattorizzare $\frac{n(n-1)}{2} = xy$ come prodotto di due interi x e y. Dato che $n \neq 0, 1$ per ipotesi, $\frac{n(n-1)}{2}$ è un intero positivo, e quindi il numero di queste fattorizzazioni è finito; ne segue che il sistema avrà un numero finito di soluzioni, $(a, b, c) = (x + n, y + n, x + y + n)$.

Per trovare almeno una soluzione, per ogni n possiamo scegliere $x = 1, y = \frac{n(n-1)}{2}$, da cui ricaviamo la soluzione

$$(a, b, c) = \left(n + 1, \frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} + 1\right).$$

3. Maga Magò ha un mazzo di 52 carte, disposte in pila, con il dorso in alto. Magò separa il mazzetto costituito dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge, e lo mette sotto alla pila. Ora tutte le carte sono nuovamente in pila, ma non tutte hanno ancora il dorso in alto: le sette in fondo sono girate al contrario. Magò ripete l'operazione precedente finché non si verifica di nuovo che tutte le carte hanno il dorso in alto. In totale, quanti mazzetti di sette carte ha girato Magò?

Soluzione: Coloriamo le carte del mazzo di blu e di rosso, a gruppetti alternati di tre e quattro rispettivamente. Le tre in cima sono blu, le quattro successive rosse, le tre ancora dopo blu, e via dicendo. Osserviamo che, quando la maga Magò gira un mazzetto, questa colorazione a gruppetti alternati si mantiene. Se concentriamo la nostra attenzione sulle sole carte blu, vediamo che ci sono otto gruppetti di tre carte, ed a ogni mossa il gruppetto sommitale viene posto in fondo alla sequenza capovolto. Servono quindi otto mosse per capovolgere tutti i gruppetti, e altre otto per rimetterli nel verso iniziale. Di conseguenza, le carte blu tornano ad essere tutte rivolte verso il basso ogni 16 mosse. Analogamente accade per le carte rosse, che formano sette gruppetti di quattro carte, quindi tornano nello stato iniziale ogni 14 mosse. Tutte le carte saranno allora nuovamente rivolte in basso per la prima volta dopo $112 = \mathrm{mcm}(16, 14)$ mosse.

4. $ABCD$ è un tetraedro con la seguente proprietà: detti A', B', C', D', rispettivamente, gli incentri delle facce BCD, ACD, ABD ed ABC, si ha che le rette AA', BB', CC' e DD' hanno un punto in comune. Dimostrare che il prodotto delle lunghezze di due spigoli opposti del tetraedro è costante, ossia che $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Soluzione: Sia P il punto d'intersezione delle rette AA', BB', CC', DD', e si consideri il piano Π passante per A, P, B. Poiché Π contiene le rette AP e BP, esso contiene i punti A', B', che si trovano su tali rette; dunque, detta AK la bisettrice dell'angolo in A nel triangolo ADC e detta BL la bisettrice dell'angolo in B nel triangolo BCD, abbiamo che anche i punti K ed L appartengono a Π, dato che le rette AA' e BB' (che contengono tali punti) lo fanno. D'altra parte, la retta CD non è contenuta nel piano Π (o il tetraedro sarebbe degenere); essa contiene K ed L e ha al più un punto d'intersezione con il piano, dunque K ed L coincidono. Da questo segue ovviamente che $DK : KC = DL : LC$; ma, per il teorema della bisettrice, $DK : KC = AD : AC$ e $DL : LC = BD : BC$, da cui $AD : AC = BD : BC$, ovvero $AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Il medesimo ragionamento applicato al piano per B, P, C comporta $AB \cdot CD = AC \cdot BD$, da cui la tesi.

5. Sia $x_1, x_2, x_3, \ldots$ una successione di interi positivi tale che, per ogni m, n interi positivi, valga $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$. Dimostrare che esiste un intero positivo i tale che $x_i \geq 2017$.

Soluzione: Diciamo che due numeri i e j sono connessi se possono essere scritti uno nella forma mn e l'altro nella forma $m(n+1)$ per opportuni m e n. Il testo dell'esercizio ci dice che x_i è diverso da x_j ogniqualvolta i e j sono connessi. Vogliamo dimostrare che vi sono almeno 2017 numeri interi positivi $i_1 \ldots i_{2017}$ tali che i 2017 termini $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2017}}$ della successione sono tutti diversi fra loro: questo implica l'asserto per il principio dei cassetti. Ci basta quindi dimostrare che esistono 2017 interi positivi $i_1 \ldots i_{2017}$ a due a due connessi fra di loro.

Dimostriamo per induzione su n che per ogni n esistono n interi positivi $i_1 \ldots i_n$ a due a due connessi fra loro. Nel caso $n = 1$, la base dell'induzione, basta fissare $i_1 = 1$ e non c'è niente da dimostrare.

Osserviamo che i e j, con $i < j$, sono connessi se e solo se $j - i$ è un divisore di i. Quindi, se i e j sono connessi e k è multiplo di i allora $k + i$ e $k + j$ sono connessi.

Venendo al passo induttivo, abbiamo per ipotesi n interi positivi a due a due connessi $i_1, \ldots, i_n$. Sia k il loro prodotto. Per la nostra osservazione i numeri $k + i_1, \ldots, k + i_n$ sono a due a due connessi. Questi numeri sono anche tutti connessi a k. Abbiamo quindi costruito $n + 1$ numeri a due a due connessi, come richiesto per completare l'induzione.

Soluzione alternativa: Assumiamo per assurdo che x_i sia minore di 2017 per ogni i. Dimostreremo per induzione su n che per ogni k esiste un intervallo di k numeri consecutivi tale che la successione x_i prende al più $2016-n$ valori diversi per i che varia nell'intervallo. Da questo segue immediatamente una contraddizione considerando il caso $n = 2016$, $k = 1$.

La base dell'induzione, $n = 0$, è conseguenza immediata dell'ipotesi assurda.

Per il passo induttivo, vogliamo dimostrare che esiste un intervallo di lunghezza k tale che x_i prende al più $2016-(n+1)$ valori diversi in quell'intervallo. Per ipotesi induttiva, abbiamo un intervallo I di lunghezza $3k!$ su cui la successione prende al più $2016 - n$ valori diversi. Questo intervallo deve contenere due multipli consecutivi di $k!$, diciamo $mk!$ e $(m+1)k!$, quindi anche i numeri della forma $mk!+j$ con $1 \leq j \leq k \leq k!$. Osservando che $mk!$ è multiplo di j per ogni $j = 1, \ldots, k$, vediamo che i numeri $x_{mk!+j}$ sono tutti diversi da $x_{mk!}$. La successione x_i non può quindi assumere $2016 - n$ o più valori diversi per i nell'intervallo $mk! + 1, \ldots, mk! + k$, altrimenti essa assumerebbe $2016 - n + 1$ o più valori nell'intervallo I, contraddicendo l'ipotesi induttiva.

6. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi m tali che il numero di fattori primi distinti *dispari* di $m(m+3)$ è un multiplo di 3.

Nota: Per esempio, ill numero $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ha due fattori primi distinti dispari e il numero $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ ne ha tre.

Soluzione: Chiamiamo $f(m) = m(m+3)$, e $d(m)$ il numero di fattori primi dispari distinti di $f(m)$. Si ha che $f(m)f(m+1) = f(m^2+4m)$; inoltre, $f(m)$ e $f(m+1)$ hanno 2 come unico fattore primo in comune. Infatti, supponiamo che p sia un primo dispari che divide sia $f(m)$, sia $f(m+1)$. Allora p divide anche $f(m+1) - f(m) = 2(m+2)$, e quindi p divide $m+2$. Ma $m+2$ e $m+3$ sono coprimi, quindi p divide sia m sia $m+2$, e abbiamo quindi raggiunto una contraddizione. Ne segue quindi che $d(m^2+4m) = d(m)+d(m+1)$. Osserviamo infine che, se i resti della divisione di $d(n)$ e $d(n+1)$ per 3 sono distinti ed entrambi diversi da 0, allora $d(n^2+4n) = d(n) + d(n+1)$ è divisibile per 3.

Vogliamo dimostrare che, fissato un qualunque intero $n > 2$, esiste un intero $m \geq n$ tale che $d(m)$ sia divisibile per 3.

Procediamo per assurdo: assumiamo che $d(m)$ non sia multiplo di 3 per ogni $m \geq n$. Allora, per ogni $m \geq n$, il resto di $d(m)$ nella divisione per 3 deve essere uguale al resto di $d(m+1)$, altrimenti $d(m^2+4m) = d(m) + d(m+1)$ sarebbe multiplo di 3. Ne segue che $d(m)$ ha sempre lo stesso resto per ogni $m \geq n$. Questo, tuttavia, contraddice il fatto che $d(n^2+4n) = d(n)+d(n+1) = 2d(n)$ ha resto 2 se $d(n)$ ha resto 1 e viceversa.