Giochi di Archimede 2018

Soluzioni gara triennio (versione T1)

(1) La risposta corretta è (B).
Le frazioni sono infatti tutte del tipo $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, dunque la più grande è quella che ha il denominatore x minimo.
(Quesito proposto da G. Manganelli)

(2) La risposta corretta è (C).
Dopo che Claudia ha pescato una carta da quelle di Luca, Luca si troverà con due carte di un colore "A" ed una di colore "B", mentre Claudia avrà due carte di colore "A" ed tre di colore "B". La probabilità che Luca peschi al suo turno proprio una delle tre carte di colore "B" di Claudia (e si ritrovino quindi entrambi con due carte dello stesso colore) è quindi uguale a $3/5$.
(Quesito proposto da S. Campigotto)

(3) La risposta corretta è (D).
I cubetti che avranno almeno una faccia colorate di verde corrispondono precisamente ai cubetti che giacciono sulla superficie del cubo, cioè 10^3 (il totale dei cubetti) meno 8^3 (il totale dei cubetti "interni", che formano un cubo di lato 8). Tali cubetti saranno dunque in totale 488.
(Quesito proposto da C. Di Stefano)

(4) La risposta corretta è (E).
Difatti, se n è un numero somma dei quadrati di due numeri $3h, 3k$ interi multipli di tre, allora deve aversi $n = 9(h^2 + k^2)$; dunque n è divisibile per 9. Delle risposte possibili soltanto 459, 495 e 549 sono divisibili per 9. D'altronde, se si avesse $459 = 9(h^2 + k^2)$, ovvero $51 = h^2 + k^2$, uno tra h^2 e k^2 (diciamo h^2) sarebbe maggiore di 25: sicché le uniche possibilità sarebbero $h^2 = 36$ (dunque $k^2 = 11$, assurdo) e $h^2 = 49$ (dunque $k^2 = 2$, ancora assurdo). Analogamente si scarta la possibilità che $495 = 9(h^2 + k^2)$. L'ultima possibilità è $n = 549$, che è effettivamente ottenibile come somma di due quadrati di multipli di tre, e precisamente: $549 = 9(6^2 + 5^2)$.
(Quesito proposto da G. Manganelli)

(5) La risposta corretta è (E).
Detta E l'energia totale immagazzinabile nel cellulare, l'energia immagazzinata in un minuto senza usarlo sarà uguale $\frac{E}{120}$; l'energia immagazzinata in un minuto di utilizzo sarà invece uguale a $\frac{60}{100} \cdot \frac{E}{120} = \frac{E}{200}$. Se il tempo necessario alla ricarica con x minuti di utilizzo è di 150 minuti, allora deve aversi $(150 - x)E/120 + xE/200 = E$, dunque $x = 75$.
(Quesito proposto da G. Navone)

Nota: stiamo supponendo implicitamente che l'energia venga immagazzinata nel cellulare in modo uniforme, dunque lineare nel tempo, indipendentemente da quanta carica sia già presente nell'apparecchio. Tale ipotesi in realtà non è corretta dal punto di vista fisico, poiché il processo di carica dipende dal tipo di batteria e dal metodo utilizzato (e in generale dipende dalla corrente e dalla tensione applicata).

(6) La risposta corretta è (C).
Per il teorema di Pitagora, si ha $A_2A_3 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, quindi $A_3A_4 = \sqrt{1^2 + 2} = \sqrt{3}$ e così via: $A_nA_{n+1} = \sqrt{1^2 + (n-1)} = \sqrt{n}$. Dunque $A_{900}A_{901} = 30$.
(Quesito proposto da P. Francini)

(7) La risposta corretta è (D).
Detto x il numero di quesiti della lista, il punteggio realizzato da Costanza vale per ipotesi $\frac{2}{3}(x - 14) \cdot 5 + 14 = \frac{x}{2} \cdot 5 - 1$, da cui segue immediatamente $x = 38$.
(Quesito proposto da C. Di Stefano)

(8) La risposta corretta è (A).
Sviluppando il quadrato otteniamo $10^{4036} + 4036 \cdot 10^{2018} + 4072324$. Il primo dei tre addendi è un numero formato dalla cifra 1 seguita da 4036 zeri; il secondo si scrive come 4036 seguito da 2018 zeri; il terzo invece ha solo 7 cifre. Sommandoli, otteniamo un numero le cui cifre diverse da zero sono solamente: $1, 4, 3, 6, 4, 7, 2, 3, 2, 4$ la cui somma è 36.
(Quesito proposto da C. Di Stefano)

(9) La risposta corretta è (B).
Sia x il lato minore del rettangolo grigio e Δ lo spessore della cornice. Per ipotesi si ha

$$2x + 2\Delta = \frac{8}{5}(x + 2\Delta)$$

da cui si deduce $x = 3\Delta$. Il rapporto tra del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice e l'area del rettangolo grigio vale dunque $\frac{(2x+2\Delta)(x+2\Delta)}{2x^2} = 1 + \frac{3\Delta}{x} + 2\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2 = \frac{20}{9}$ cm^2.
(Quesito proposto da P. Negrini)

(10) La risposta corretta è (A).
Le bomboniere possono essere di tre tipi: quelle con 3 confetti uguali, quelle con 2 confetti uguali ed uno diverso, e quelle con tutti e tre i confetti di gusti differenti. Le bomboniere possibili con 3 confetti uguali sono 12 (quanti i gusti possibili). Quelle con 2 confetti uguali ed uno diverso sono $2 \cdot \binom{12}{2} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} = 132$ (corrispondenti al numero di scelte di due gusti tra i 12 possibili, moltiplicato per 2, che è il numero di possibili bomboniere che si possono ottenere prendendo tre confetticon due gusti uguali tra i due gusti selezionati). Quelle con tutti e tre i confetti di gusti differenti sono invece $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3} = 220$ (corrispondenti alla scelta di tre gusti sui 12 possibili). Il numero totale di bomboniere possibili che soddisfano le richieste del pasticcere è dunque $12 + 132 + 220 = 364$.
(Quesito proposto da P. Negrini)

(11) La risposta corretta è (C).
Chiamiamo x e y le altezze, in orizzontale, dei due triangolini grigi nel quadrato di sinistra. Poiché il lato di tale quadrato è 6, la base del più grande dei due vale 6 e la base dell'altro vale 3 . Per similitudine di tali triangolini deduciamo $x + y = 6$ e $x/y = \frac{6}{3} = 2$, cioè $x = 4$ ed $y = 2$. Otteniamo quindi che l'area totale della regione grigia è $\frac{4 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} = 24$.
(Quesito proposto da N. Deniskin)

(12) La risposta corretta è (D).
Se il numero n intero ha scrittura decimale uguale ad ab, il numero S si scriverà $ababab$, ovvero $S = 1 \cdot n + 100 \cdot n + 10000 \cdot n = 101010 \cdot n$. Ora, 101010 si scompone in fattori primi come $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$: ne consegue che né 101 né $1111 = 11 \cdot 101$ possono dividere S (poiché il fattore primo 101 non compare tra i fattori di S (si ricordi che n è di due cifre), quindi le rsposte (A) e (B) sono sbagliate. D'altronde, neppure 11 né $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ dividono S se n non è divisibile per 11; quindi le risposte (C) ed (E) sono parimenti sbagliate. Per concludere, è sufficiente notare che $111 = 3 \cdot 37$ divide 101010, dunque divide S qualsiasi sia il valore di n.
(Quesito proposto da S. Campigotto)

(13) La risposta corretta è (D).
Siano infatti D ed E i punti di tangenza di una retta t uscente da A con le circonferenze β e γ, rispettivamente. Poiché $BD = 40$, dal teorema di Talete segue che

$$\frac{r + 40}{40} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} = \frac{2(r + 40)}{r}$$

da cui deduciamo $r = 80$.
(Quesito proposto da R. Fratello)

(14) La risposta corretta è (C).
Tenendo in considerazione esclusivamente il genere delle 5 persone (maschio o femmina), il numero totale di possibili configurazioni è uguale a 60: cioè $\binom{6}{2} = 15$ (il numero possibile di scelte per i posti delle ragazze, tra i 6 possibili) moltiplicato per 4 (corrispondente a scegliere una delle quattro sedie rimanenti da lasciar vuota). Il numero di casi favorevoli, cioè in cui la sedia vuota si trova tra un ragazzo e una ragazza, è invece uguale a 36: cioè 6 (il numero possibile di scelte per la sedia da lasciar vuota) moltiplicato per 2 (corrispondente alla scelta di una delle due sedie, accanto a quella vuota, in cui far sedere una ragazza) moltiplicato ancora per 3 (il numero di scelte possibili su dove far sedere la seconda ragazza, in uno dei tre posti rimanenti, diversi dalla sedia lasciata libera e dalle due sedie adiacenti). La probabilità richiesta è dunque uguale a $36/60 = 3/5$.
(Quesito proposto da M. Rossi)

(15) La risposta corretta è (B).
I multipli di 11 tra 1 e 2018 sono 183, in quanto $2018 = 183 \cdot 11 + 5$. Eliminando tali numeri, resta una lista di 1835 numeri da mettere nella tabella, di cui il numero 2018 è l'ultimo: poiché $1835 = 262 \cdot 7 + 1$, tale ultimo numero cadrà pertanto nella prima colonna della 263^a riga.
(Quesito proposto da C. Di Stefano)

(16) La risposta corretta è (A).
Detto M il punto medio di AC, per il teorema della bisettrice abbiamo $\frac{DB}{DM} = \frac{CB}{CM} = \frac{16}{5}$; quindi $BM = DB + DM = \frac{21}{16}DB$. D'altronde, l'area del triangolo BMC è la metà dell'area del triangolo ABC (in quanto ha base $MC = \frac{1}{2}AC$, e uguale altezza). L'area del triangolo BDC, con base BD e altezza uguale all'altezza del triangolo BMC rispetto BM , è allora

$$\frac{16}{21}\textbf{area}(BMC) = \frac{16}{21} \cdot \frac{1}{2}\textbf{area}(ABC) = \frac{32}{7}.$$

(Quesito proposto da ????)

(17) La risposta corretta è (E).
Il discriminante dell'equazione è $\Delta = b^2 - 4a^2 = (b - 2a)(b + 2a)$, che è positivo se $b > 2a$, dunque la prima affermazione è corretta. D'altronde, se esistono soluzioni reali, esse sono uguali a

$$x_\pm = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$$

ed in qualsiasi caso esse sono positive, in quanto $b > \sqrt{b^2 - 4a}$ (dato che $a > 0$), per cui anche la seconda affermazione è certamente corretta. Notiamo inoltre che l'equazione è equivalente a $x^2 - \frac{b}{a}x + 1 = 0$, pertanto il prodotto delle soluzioni deve dare 1; questo implica che anche le due ultime affermazioni sono corrette. Infine, se vale $x_+ = 9x_-$, allora $b + \sqrt{b^2 - 4a^2} = 9(b - \sqrt{b^2 - 4a^2})$, da cui si ottiene immediatamente $b = \frac{10}{3}a > 3a$, dunque anche la terza affermazione è corretta.
(Quesito proposto da G.M. Tomaselli)

(18) La risposta corretta è (D).
Diciamo A, B, C, D i quattro punti medi, in senso orario, cominciando dall'alto. Conduciamo i segmenti che congiungono P ai quattro vertici: essi tagliano i quattro quadrilateri interni in triangoli che hanno a due a due la stessa area, in quanto aventi ugual base ed altezza. Precisamente, i due triangoli adiacenti al segmento AP hanno ugual area a, i due triangoli adiacenti al segmento BP hanno ugual area b, i due adacenti a CP hanno area c e quelli adiacenti a DP hanno area d. Pertanto abbiamo:

$$\begin{cases} b + c &= 33 \\ c + d &= 24 \\ d + a &= 22 \end{cases}$$

da cui $a + b = 33 + 22 - (c + d) = 55 - 24 = 31$.
(Quesito proposto da G. Manganelli)

(19) La risposta corretta è (A).
Infatti, il numero di T nella sequenza di monete rimane sempre pari, dopo ogni mossa: pertanto non è possibile arrivare a una configurazione contenente esattamente cinque T.
(Quesito proposto da G. Manganelli)

(20) La risposta corretta è (B).
Alla prima eliminazione, Cleopatra toglierà n soldatini, e si ritroverà esattamente con $n^2 - n = n(n-1)$ soldatini. Poiché $(n-1)^2 < n(n-1) < n^2$, alla seconda eliminazione Cleopatra ne toglierà allora $(n-1)$, restando con $n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2$ soldatini. Ai due passi successivi Cleopatra toglierà allora, analogamente, prima $(n-1)$ soldatini, e poi $(n-2)$, restando ancora con $(n-2)^2$ soldatini. Ad ogni passo, quindi, i soldatini restanti potranno essere $k(k-1)$ oppure k^2, per un k compreso tra 0 ed n. Ma tra i numeri proposti, nessuno è un quadrato, e solo 132 si scrive come $k(k-1) = 12 \cdot 11$.
(Quesito proposto da M. Rossi)

Come sempre, i problemi proposti sono stati, oltre che controllati e selezionati, in molti casi ampiamente modificati o riformulati dai responsabili della gara. Pertanto, nell'indicare i nominativi degli autori delle proposte, resta inteso che i responsabili sia della scelta dei quesiti, sia di eventuali errori, imprecisioni o formulazioni criticabili, sono da individuarsi esclusivamente nei responsabili stessi della gara ed in nessuna misura negli autori delle proposte.
A tutti loro, ed anche a chi ha contribuito con quesiti che non sono stati selezionati, va il nostro ringraziamento per la varietà, l'originalità e la qualità delle proposte presentate.

I responsabili dei Giochi di Archimede,
Paolo Francini, Andrea Sambusetti