Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca
Scuola Normale Superiore

I Giochi di Archimede, Gara Triennio – 23 novembre 2016

Soluzione dei problemi (l'ordine si riferisce al testo T1)

Problema 1. *La risposta è* **(C)**.
Il numero complessivo di minuti giocati dai componenti di ciascuna squadra durante un incontro è $90 \cdot 11 = 990$. Questi 990 minuti vanno divisi equamente tra i sedici componenti della squadra. Ciascun giocatore sarà quindi in campo per $990/16 = 61,875$ minuti.
(Problema proposto da F. Caceffo)

Problema 2. *La risposta è* **(A)**.
Il problema è equivalente a permutare i numeri $1, 2, 3, 4$ in modo che alla posizione i non compaia il numero i. Le nove sole possibilità per farlo sono:

$$2,1,4,3 \quad 2,3,4,1 \quad 2,4,1,3 \quad 3,1,4,2 \quad 3,4,1,2 \quad 3,4,2,1 \quad 4,1,2,3 \quad 4,3,1,2 \quad 4,3,2,1.$$

(Problema proposto da A. Dal Zotto)

Problema 3. *La risposta è* **(D)**.
La fattorizzazione in primi di 600000 è $2^6 \cdot 3 \cdot 5^5$. Se il prodotto tra a e b è 600000, saranno complessivamente presenti nelle fattorizzazioni di a e b sei fattori 2, cinque fattori 5 e un fattore 3. Il 3 non comparirà quindi nella fattorizzazione del massimo comun divisore, mentre il numero massimo di fattori 2 e 5 si otterrà disponendo tre fattori 2 in ciascun numero, e dividendo i cinque fattori 5 disponendone due da una parte e tre dall'altra. Il massimo valore del massimo comun divisore è quindi $2^3 \cdot 5^2 = 200$.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 4. *La risposta è* **(B)**.
La massima potenza di 2 che divide il numero di Alberto è 2^{101}, ed è 2^{100} per Barbara, 2^{101} per Carlo e 2^{100} per Daria. Dopo 100 turni usciranno dal gioco Barbara e Daria, mentre il turno successivo toccherà ad Alberto e Carlo.
(Problema proposto da A. Bianchi)

Problema 5. *La risposta è* **(B)**.
Le due persone con la maglia rossa non possono essere nella stessa squadra; inoltre, i loro compagni di squadra devono avere maglie di colore diverso, altrimenti nella squadra rimanente finirebbero due persone con la maglia dello stesso colore. Un giocatore rosso è quindi accoppiato ad un giocatore azzurro, mentre l'altro giocatore rosso è accoppiato ad un giocatore giallo. La composizione di queste due coppie decide anche la terza. Abbiamo due possibili scelte per il giocatore rosso che gioca con un azzurro; l'altro giocatore rosso farà squadra con un giallo. A questo punto abbiamo due scelte su quale azzurro giochi con il primo rosso e quale giallo giochi col secondo rosso. Tutte le scelte sono indipendenti, e abbiamo quindi in totale $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modi di accoppiare i giocatori.
(Problema proposto da A. Bianchi)

Problema 6. *La risposta è* **(A)**.
Ogni anno, se il numero di squadre è n, il numero totale dei partecipanti è n^2. Il numero di squadre aumenta di 1 ogni anno. Se alla gara del 2000 hanno partecipato N squadre, si ha $y = N^2$ e $x = (N+16)^2$; pertanto $x - y = 32N + 256 = 32(N+8)$.
(Problema proposto da G. Barbarino)

Problema 7. *La risposta è* **(E)**.
La squadra D ha subito 7 reti, e deve quindi aver giocato necessariamente con le squadre A e B, subendo 3 goal dalla squadra A e 4 dalla B, senza segnarne alcuno. Nella giornata in cui si è giocato l'incontro $A-D$ si è giocato anche $B-C$, mentre contemporaneamente a $B-D$ si è giocato $A-C$. È ora facile calcolare il risultato di ogni partita:

$$A-D:3-0 \qquad B-C:0-0 \qquad B-D:4-0 \qquad A-C:0-1$$

La classifica è quindi: 4 punti B e C, 3 punti A, 0 punti D, corrispondente alla risposta $3, 4, 4, 0$.
(Problema proposto da S. Pelizzola)

Problema 8. *La risposta è* **(D)**.
Detto t il tempo trascorso, misurato in ore, la strada percorsa dal motorino è pari a $65t$ chilometri, e quella percorsa dalla bicicletta è $30t$ chilometri. La richiesta del problema equivale a trovare il minimo valore positivo di t per il quale $30t$ è multiplo di 90 e la differenza dei chilometri percorsi $65t - 30t = 35t$ è multipla di 360. Posto $30t = 90m$ e $35t = 360n$, con m, n interi positivi, si ottiene $t = 3m$ e quindi, sostituendo nella seconda equazione e semplificando, $7m = 24n$. Pertanto m è un multiplo di 24 e il tempo t sarà un multiplo di 72. È allora immediato verificare che tutti i multipli di 72 sono soluzioni, e dunque che il minimo valore positivo possibile per t è 72.
(Problema proposto da A. Bianchi)

Problema 9. *La risposta è* **(B)**.
Le quattro regioni in figura hanno tutte la stessa area. La loro unione è formata da un quadrato centrale di lato 2, e quindi di area 4, e da quattro semicerchi di raggio 1, ciascuna di area $\pi/2$. L'area complessiva è quindi $4 + 2\pi$, mentre ciascuna delle quattro regioni avrà area pari a $1 + \pi/2$.
(Problema proposto da R. Zanotto)

Problema 10. *La risposta è* **(A)**.
Giulietta ha due giorni liberi ogni 12, e i primi giorni liberi dopo martedì 22 e mercoledì 23 novembre saranno una domenica e un lunedì. Le volte successive saranno venerdì-sabato, mercoledì-giovedì, lunedì-martedì, sabato-domenica, giovedì-venerdì e finalmente si riprenderà da martedì mercoledì. Gli incontri tra Romeo e Giulietta avranno quindi una periodicità di $7 \cdot 12 = 84$ giorni, e i primi due incontri saranno dopo 11 e dopo 60 giorni. Essendovi in un anno 365 giorni, gli incontri avverranno dopo $11, 60, 95, 144, 179, 228, 263, 312, 347$ giorni, e saranno quindi in totale 9.
(Problema proposto da P. Negrini)

Problema 11. *La risposta è* **(A)**.
Poiché $3^{12} - 1 = (3^6 - 1)(3^6 + 1) = 728 \cdot 730$, è facile pervenire alla fattorizzazione:

$$3^{12} - 1 = (2^3 \cdot 7 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 73) = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$$

dunque il più grande fattore primo di $3^{12} - 1$ è 73.
(Problema proposto da R. Zanotto)

Problema 12. *La risposta è* **(E)**.
La somma dei punteggi dei dadi rossi può essere uguale al punteggio del dado azzurro solo quando vale $2, 3, 4, 5, 6$. Tali somme vengono raggiunte con probabilità $1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36$ rispettivamente. La probabilità che il punteggio del dado azzurro sia uguale è $1/6$ in ognuno dei casi. La probabilità complessiva è quindi $1/6 \cdot (1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36) = 15/216 = 5/72$.
(Problema proposto da P. Negrini)

Problema 13. *La risposta è* **(E)**.
Sia $n > 1$. Poiché $n^3 = n \cdot n^2 > (n-1)(n^2-1) = (n-1)^2(n+1)$, si vede facilmente che $n/(n-1)^2 > (n+1)/n^2$ e quindi che

$$\frac{\sqrt{n}}{n-1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n}.$$

Di conseguenza, il più piccolo tra i numeri proposti è $\sqrt{2020}/2019$.
(Problema proposto da K. Kuzmin)

Problema 14. *La risposta è* **(C)**.
Siano $\alpha = \widehat{DCO} = \widehat{ODC}$ e $\beta = \widehat{APC} = \widehat{OPD} = \widehat{DOP}$. Per il teorema dell'angolo esterno applicato all'angolo in O del triangolo COP vale $\widehat{AOC} = \alpha + \beta$; e per lo stesso teorema applicato all'angolo in D del triangolo ODP vale $\alpha = 2\beta$. Dunque $\widehat{AOC} = 3\beta$ e $\widehat{APC} = 20°$.
(Problema proposto da F. Caceffo)

Problema 15. *La risposta è* **(D)**.
L'affermazione è equivalente a dire che x è multiplo di $1, 2, 3$ e 4, ma non di 5. Dobbiamo quindi contare gli interi positivi, minori di 2016 che siano multipli di 12, ma non di 60. Poiché $2016/12 = 168$, e $2016/60 = 33$, ve ne saranno esattamente $167 - 33 = 134$.
(Problema proposto da E. Tron)

Problema 16. *La risposta è* **(B)**.
Poiché gli angoli alla circonferenza $\widehat{EFX}$ ed $\widehat{GFX}$ sono uguali, segue che gli archi $\widehat{EX}$ e $\widehat{GX}$ sono congruenti. D'altronde, lo sono anche $\widehat{YE}$ e $\widehat{YG}$, per ipotesi; dunque $\widehat{YE} + \widehat{EX} = \widehat{YG} + \widehat{GX}$ è pari a una semicirconferenza, e XY è un diametro. Ne segue che il triangolo XFY è retto in F, pertanto $XY^2 = FY^2 + FX^2 = 5^2 + 12^2 = 169$; il valore del raggio è allora $\frac{1}{2}XY = \frac{13}{2}$.
(Problema proposto da V. Ricciuti)

Problema 17. *La risposta è* **(E)**.
Sia r l'asse del segmento AC: la parte di perimetro che ci interessa è costituita precisamente dai punti del perimetro appartenenti al semipiano determinato da r contenente A. Siano allora R ed S i punti in cui tale asse incontra il perimetro del triangolo, con R appartenente ad AC; è evidente che S appartiene al lato AB, visto che il punto B dista 10 cm da C e 12 cm da A. Detta H la proiezione di C su AB ed $x = SH$, si ha dunque $RC = 5$ e $CS = AS = 6 + x$. Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo AHC e al triangolo CHB troviamo: $CH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ e

$$(6 + x)^2 = 8^2 + x^2$$

da cui $x = \frac{7}{3}$. La parte di perimetro in considerazione vale dunque $RA + AH + HS = 5 + 6 + \frac{7}{3} = \frac{40}{3}$.
(Problema proposto da P. Negrini)

Problema 18. *La risposta è* **(A)**.
Se la pulce effettua a mosse del primo tipo, b del secondo e c del terzo, lo spostamento complessivo nella direzione orizzontale sarà $4c - 2b$. Vogliamo muoverci dal punto $(0, 0)$ al punto $(0, 2016)$, e quindi $4c - 2b$ deve essere uguale a 0, da cui $b = 2c$. Lo spostamento complessivo nella direzione verticale sarà allora $5a - 3b - 9c = 5a - 6c - 9c = 5(a - 3c)$, che è necessariamente multiplo di 5. Sarà quindi impossibile partire dal punto $(0, 0)$ e arrivare in $(0, 2016)$, poiché lo spostamento verticale necessario è 2016, che non è multiplo di 5.
(Problema proposto da C. Casamento Tumeo)

Problema 19. *La risposta è* **(B)**.
Tracciamo la diagonale BD: l'area del quadrilatero $ABCD$ è uguale alla somma delle aree dei triangoli ADB e DBC, mentre l'area del quadrilatero $BEDF$ è uguale alla somma delle aree dei triangoli EDB e DBF. D'altronde, il triangolo ADB ha area doppia del triangolo EDB (essendo unione dei triangoli ADE e EDB, che sono equiestesi, poiché hanno stessa altezza e basi di ugual lunghezza $AE = EB$). Analogamente il triangolo DBC ha area doppia del triangolo DBF (in quanto anche BDF e BFC sono equiestesi). L'area del quadrilatero $ABCD$ è dunque uguale al doppio dell'area di $BEDF$, cioè 36 cm^2.
(Problema proposto da S. Pelizzola)

Problema 20. *La risposta è* **(C)**.
Il polinomio $(x + 1) \dots (x + n)$ ha grado n, e il suo coefficiente di grado $n - 1$ è

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2.$$

Di conseguenza, il polinomio $p(x)$ ha grado $n-1$, e il suo coefficiente di grado $n-2$ è $n(n+1)/2-k$. Dobbiamo allora risolvere $n(n + 1)/2 - k = 67$. Ricordando che $1 \leq k \leq n$, si ha

$$68 \leq n(n + 1)/2 \leq 67 + n.$$

La disuguaglianza $n(n + 1)/2 \geq 68$ è verificata solo quando $n \geq 12$, mentre $n(n + 1)/2 \leq 67 + n$ si scrive anche $n(n - 1)/2 \leq 67$, da cui $n \leq 12$. In conclusione, $n = 12$ e $k = 11$.
(Problema proposto da V. Ricciuti)