PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

27 novembre 2014

Risoluzione dei problemi (l'ordine si riferisce al Testo 1)

Problema 1. *Nel paese di Gnallucci circolano quattro monete: dobloni, zecchini, talleri e fufignezi. Un doblone vale quanto uno zecchino più un tallero e un fufignezo. Due dobloni valgono quanto uno zecchino più tre talleri e cinque fufignezi. Un tale entra in un negozio con uno zecchino e ne esce con un tallero. In fufignezi, quanto ha pagato?*
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

La risposta è **(C)**. Indichiamo con D, Z, F, T il valore di un doblone, di uno zecchino, di un fufignezo e di un tallero, rispettivamente. Sappiamo che $D = Z + T + F$ e $2D = Z + 3T + 5F$. Se, ad esempio, moltiplichiamo la prima equazione per due e la sottraiamo dalla seconda troviamo: $Z = T + 3F$. Dunque il tale ha pagato 3 fufignezi.
[Problema proposto da M. Mamino]

Problema 2. *Nell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ si sa che $c < 0$. Allora certamente:*
(A) *l'equazione non ha radici reali,*
(B) *l'equazione ha due radici reali coincidenti,*
(C) *l'equazione ha una radice reale positiva e una radice reale negativa,*
(D) *l'equazione ha due radici reali positive,*
(E) *l'equazione ha due radici reali negative.*

La risposta è **(C)**. Osserviamo che il discriminante dell'equazione è $\Delta = b^2 - 4c$. Poiché $c < 0$, segue che $\Delta > 0$, ovvero l'equazione ha due radici reali distinte (il che esclude le risposte **(A)** e **(B)**). Sappiamo inoltre che il prodotto delle due radici dell'equazione coincide con il termine noto che in questo caso è il numero negativo c; quindi le due radici hanno segno opposto.
[Problema proposto da G. Barbarino.]

Problema 3. *Un parallelogramma di perimetro $\mathcal{P} = 8$ cm ha area $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$ cm^2. Quanto misura il suo angolo acuto?*
(A) 30°, **(B)** 45°, **(C)** 60°, **(D)** *un tale parallelogramma non esiste,* **(E)** *l'angolo non è univocamente determinabile dai dati forniti.*

La risposta è **(D)**. Chiamiamo a e b la lunghezza dei due lati del parallelogramma, e $\vartheta \neq 0$ l'angolo interno che essi formano. Dunque $a + b = \mathcal{P}/2 = 4$ ed $ab \sin\vartheta = \mathcal{A} = 4\sqrt{2}$. Allora a e b sono le due soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4x + \frac{4\sqrt{2}}{\sin\vartheta} = 0$$

il cui discriminante vale $\Delta = 16(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sin\vartheta}) \leq 16(1 - \sqrt{2}) < 0$, poiché $0 < \sin\vartheta \leq 1$. Ne segue che tale equazione non ha soluzioni reali, ed un tale parallelogramma non esiste.

Se non si vuole usare la trigonometria, è sufficiente chiamare h l'altezza del parallelogramma sulla base b, sicché $h = \mathcal{A}/b = \mathcal{A}/(\frac{\mathcal{P}}{2} - a) = \frac{4\sqrt{2}}{4-a} > a$; infatti $a(4-a) - 4\sqrt{2} < 0$ per ogni a, essendo il discriminante dell'equazione corrispondente $\Delta = 16(1-\sqrt{2}) < 0$. Ma h è il cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa a, quindi la relazione $h > a$ è impossibile.
[Problema proposto da A. Sambusetti.]

Problema 4. *Tredici amici si ritrovano per un gioco da tavolo. Il gioco prevede che a ogni partecipante vengano distribuiti dei sesterzi, in modo che il primo giocatore riceva un sesterzo ed ogni giocatore successivo riceva un numero di sesterzi pari al doppio di quelli assegnati al giocatore precedente. Sapendo che ci sono in tutto 10000 sesterzi, quante saranno i sesterzi che resteranno non distribuiti?*
(A) *0,* **(B)** *32,* **(C)** *205,* **(D)** *951,* **(E)** *1809.*

La risposta è **(E)**. Osserviamo che il secondo giocatore prende 2 sesterzi, il terzo $4 = 2^2$, il quarto $8 = 2^3$, il quinto $16 = 2^4$... e così via. Il numero di sesterzi distribuiti in totale è quindi

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{12}.$$

Questa è la somma delle prime n potenze naturali di un numero x fissato ($n = 12$ ed $x = 2$ in questo caso), e può essere calcolata con la formula:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

Ponendo $x = 2$ ed $n = 12$ troviamo quindi che il numero di sesterzi distribuiti è $2^{13} - 1 = 8191$, e il numero di sesterzi rimasti è $10000 - 8191 = 1809$.
[Problema proposto da S. Monica.]

Problema 5. *In una certa azienda ogni dirigente percepisce uno stipendio pari a quattro volte quello di ogni operaio. Il costo complessivo che l'azienda sostiene per pagare gli stipendi di tutti i dipendenti è uguale a sei volte il costo complessivo degli stipendi di tutti i dirigenti. Quanti operai ci sono per ciascun dirigente?*
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 20, **(D)** 24, **(E)** 30.

La risposta è **(C)**. Chiamiamo $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{O}$ rispettivamente il numero di dirigenti ed operai dell'azienda, e con d il costo di ciascun dirigente. Poiché ogni operaio costa all'azienda $d/4$, il costo totale T sostenuto dall'azienda per tutti i dipendenti è

$$6d\mathcal{D} = T = d\mathcal{D} + \frac{d}{4}\mathcal{O}$$

da cui si deduce $\mathcal{O} = 20\mathcal{D}$.
[Problema proposto da P. Negrini]

Problema 6. *Quale di questi numeri è un numero intero?*
(A) $0{,}002 \cdot 100 + \sqrt{11025}$, **(B)** $32 \cdot 3 \cdot 1{,}6$, **(C)** $(8,2)^2 - (1,8)^2$, **(D)** $(\sqrt{2}+1)^2$, **(E)** $\dfrac{34}{1{,}02} + \dfrac{5}{6\sqrt{0{,}0001}}$.

La risposta è **(C)**. Cercando i possibili divisori di 11025, troviamo che $11025 = 5^2 \cdot 21^2$, dunque il primo dei cinque numeri nelle risposte è pari a $0,2+110$ che non è intero. Il secondo numero è uguale a $32 \cdot 4,8 = 153,6$, anch'esso non intero. Il numero della terza risposta può essere scritto come:

$$(8,2)^2 - (1,8)^2 = (8,2+1,8) \cdot (8,2-1,8) = 10 \cdot 6.4 = 64$$

ed è quindi intero. Osserviamo ancora che il numero della risposta **(D)** è

$$(\sqrt{2}+1)^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2},$$

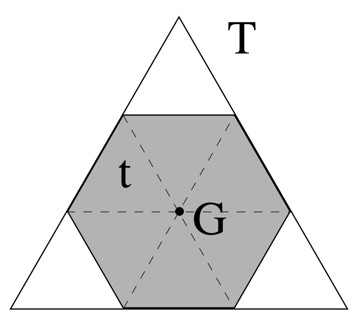
dunque non è intero (e neppure razionale!). Infine, il numero della risposta **(E)** può essere scritto come:

$$\frac{34}{\left(\frac{102}{100}\right)} + \frac{5}{6 \cdot \sqrt{10^{-4}}} = 34 \cdot \frac{100}{102} + \frac{5}{6 \cdot \frac{1}{10^2}} = \frac{100}{3} + \frac{250}{3} = \frac{350}{3}$$

che non è intero.
[Problema proposto da L. Ghidelli.]

Problema 7. *Si consideri un triangolo equilatero T, e si chiami G il suo baricentro. Si colorino di rosso tutti i punti interni al triangolo la cui distanza da G è minore o uguale alla distanza da uno qualsiasi dei tre vertici. Quanto vale il rapporto tra l'area rossa e l'area di T?*
(A) $\frac{1}{3}$, **(B)** $\frac{1}{4}$, **(C)** $\frac{2}{3}$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{9}$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La risposta è **(C)**. Gli assi dei tre segmenti che congiungono i vertici del triangolo al baricentro determinano un esagono regolare:



L'area di tale esagono è quella di 6 triangolini equilateri t di lato uguale a $\frac{1}{3}$ del triangolo iniziale T, mentre il triangolo T ha area pari a nove volte l'area di t. Pertanto il rapporto delle aree vale $\frac{2}{3}$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

Problema 8. *Sapendo che l'equazione $2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 4 soluzioni reali a, b, c, d, quanto fa $a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$?*

(A) -7, **(B)** $\frac{21}{5}$, **(C)** $\frac{10}{21}$, **(D)** $\frac{5}{2}$, **(E)** 0.

La risposta è **(E)**. Osserviamo che l'equazione in esame è simmetrica, dunque se a è una soluzione, anche a^{-1} lo è: infatti se a risolve l'equazione

$$2a^4 + 5a^3 - 21a^2 + 5a + 2 = 0$$

dividendo primo e secondo termine per a^4 troviamo:

$$2 + 5 \cdot \frac{1}{a} - 21 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^4 = 0,$$

ovvero a^{-1} è soluzione della stessa equazione $2 + 5x - 21x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0$. Allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione è uguale all'insieme dei reciproci delle soluzioni, e quindi

$$a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = 0.$$

[Problema proposto da M. Trevisiol.]

Problema 9. *Otto giocatori, di cui quattro sono difensori e quattro sono attaccanti, organizzano un torneo di biliardino. Ogni possibile coppia difensore-attaccante gioca una e una sola volta contro ogni altra possibile coppia difensore-attaccante. Quanti incontri faranno in tutto?*
(A) 24, **(B)** 36, **(C)** 48, **(D)** 72, **(E)** 144.

La risposta è **(D)**. Per ogni possibile scelta di 2 difensori tra i 4 difensori possibili e di 2 attaccanti tra i 4 possibili attaccanti si ottengono quattro squadre distinte, dunque due partite. Il numero totale di partite è allora $n = 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$, dove $\binom{4}{2} = 6$ è il numero di possibili scelte di 2 oggetti presi tra 4. Quindi $n = 72$.
[Problema proposto da A. Iraci.]

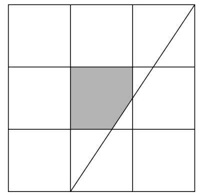
Problema 10. *È dato un numero primo le cui cifre sono, nell'ordine: a, b, c. Quanti divisori primi ha il numero di sei cifre la cui scrittura decimale è $abcabc$? [Ricordiamo che 1 non è un numero primo.]*
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

La risposta è **(D)**. Osserviamo che $abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot (1000 + 1) = abc \cdot 1001$. Scomponiamo ora 1001 in fattori primi

$$1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7.$$

Dunque $abcabc = abc \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7$ e i quattro fattori sono tutti numeri primi (abc è primo per ipotesi). Quindi i divisori primi di $abcabc$ sono abc, 13, 11 e 7, cioè quattro in tutto.
[Problema proposto da S. Mongodi.]

Problema 11. *Il quadrato in figura è diviso in 9 quadrati congruenti. Sapendo che il suo lato misura L, calcolare l'area evidenziata in grigio.*
(A) $\frac{11}{108}L^2$, **(B)** $\frac{1}{9}L^2$, **(C)** $\frac{5}{54}L^2$, **(D)** $\frac{1}{12}L^2$, **(E)** $\frac{13}{81}L^2$.



La risposta è **(A)**. Chiamiamo Q il quadrato grande di lato L, q il quadratino centrale, T il triangolo rettangolo più grande tagliato dal segmento obliquo nel quadrato Q, e t il triangolo rettangolo più piccolo tagliato dallo stesso segmento dentro al quadratino q. Chiaramente $\text{area}(q) = \frac{1}{9}\text{area}(Q)$. I triangoli t e T sono invece simili di rapporto $\frac{1}{6}$ (poiché l'altezza di t è $\frac{1}{6}L$), quindi si ha $\text{area}(t) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \text{area}(T)$. Infine, poiché la base di T è $\frac{2}{3}L$, si ha $\text{area}(T) = \frac{1}{3}\text{area}(Q)$.
Ne deduciamo che:

$$\text{area}(t) = \frac{1}{36}\text{area}(T) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3}\text{area}(Q) = \frac{1}{12}\text{area}(q)$$

Allora l'area del pentagono evidenziato in grigio vale

$$\text{area}(q) - \text{area}(t) = \left(1 - \frac{1}{12}\right) \text{area}(q) = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{9}\text{area}(Q) = \frac{11}{108}L^2.$$

[Problema proposto da A. Pesare.]

Problema 12. *Se $x + \frac{1}{x} = 5$, quanto fa $x^3 + \frac{1}{x^3}$?*
(A) 105, **(B)** 110, **(C)** 115, **(D)** 120, **(E)** 125.

La risposta è **(B)**. Utilizzando i prodotti notevoli, possiamo scrivere

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

e poiché $x + \frac{1}{x} = 5$ si deduce $x^3 + \frac{1}{x^3} = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$.
[Problema proposto da F. Poloni.]

Problema 13. *Uno studente in gita si sveglia la mattina e, dalla sua stanza di un hotel a sette piani (oltre al piano terra), scende in ascensore per recarsi al piano terra a fare colazione. Tuttavia, molto assonnato, preme ripetutamente il pulsante sbagliato e visita esattamente una volta tutti gli altri piani (escluso il suo), prima di arrivare finalmente al piano terra. Sapendo che la sua stanza non si trova al piano terrra, quanta strada percorre l'ascensore, al massimo?*
(A) *29 piani,* **(B)** *28 piani,* **(C)** *27 piani,* **(D)** *26 piani,* **(E)** *25 piani.*

La risposta è **(B)**. Sia L la lunghezza (in piani) del più lungo percorso in ascensore effettuabile premendo 7 pulsanti differenti, arrivando al piano terra al 7^o viaggio. Supponiamo che tale percorso sia ottenuto partendo dal piano x_0 e premendo, nell'ordine, i pulsanti $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 = 0$. Mostriamo che tale percorso è ottenuto invertendo ogni volta direzione di marcia.

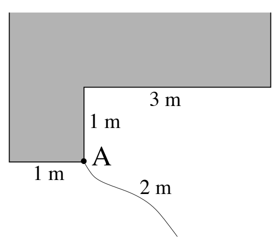
Infatti, se non si invertisse il senso di marcia anche una sola volta, la lunghezza di tale percorso equivarrebbe alla lunghezza di un percorso effettuato partendo da x_0 e premendo meno di 7 pulsanti, diciamo nell'ordine $y_1, ..., y_k = 0$ con $k \leq 6$, e invertendo ogni volta senso di marcia. Ma in tale percorso si evita necessariamente un piano y_0, sicché il percorso ottenuto:
- andando inizialmente dal piano y_0 ad y_1 (se il piano x_0 si trova tra y_0 ed y_1), e quindi seguendo la successione di piani $y_2, ..., y_k$,
- ovvero andando inizialmente da y_0 ad x_0 (se x_0 non sta tra y_0 e y_1), e poi seguendo la successione di piani $y_1, ..., y_k$,

sarebbe più lungo di L, contraddizione.
Pertanto il percorso più lungo è ottenuto necessariamente da una successione di piani che verificano

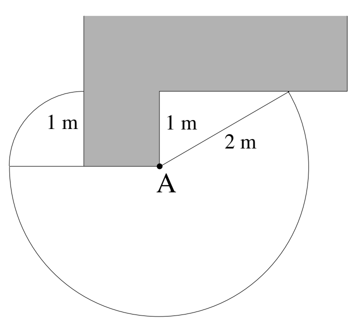
$$x_0 > x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 < x_6 > x_7 = 0$$

La lunghezza percorsa è allora $L = \sum_{i=0}^{6} |x_{i+1} - x_i| = 2(x_2 + x_4 + x_6) - 2(x_1 + x_3 + x_5) + x_0$. Tale numero è massimo per il valore più piccolo possibile di $(x_1 + x_3 + x_5)$ e per il valore più grande possibile di $(x_2 + x_4 + x_6)$, quindi $L = 2 \cdot (5 + 6 + 7) - 2 \cdot (1 + 2 + 3) + 4 = 28$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

Problema 14. *Francesco vuole seminare una zona del giardino della sua casa, che ha la forma riportata in figura (casa in grigio e giardino in bianco tutto intorno). Per far questo, lega una corda di 2 m all'angolo A della casa, la tende e, spostandone l'estremità, disegna il perimetro della zona da seminare. Quanti m^2 seminerà Francesco?*
(A) $2\pi + \sqrt{3}$, **(B)** $\frac{15}{4}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$, **(C)** $\frac{31}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$,
(D) $\frac{9}{4}\pi$, **(E)** $4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.



La risposta è **(C)**. L'area da seminare è uguale alla metà di un triangolo equilatero di lato 2 (il cui angolo in A vale $\frac{\pi}{3}$), più quella di un settore circolare di raggio 2 e di angolo al centro $\frac{7\pi}{6}$, più quella di un settore circolare di raggio 1 ed angolo al centro $\frac{\pi}{2}$:



Il totale fa dunque $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{12} \cdot 4 + \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{31}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
[Problema proposto da F. Mugelli.]

Problema 15. *Il numero intero positivo n è tale che il polinomio*

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots - 2014x^{2013} + nx^{2014}$$

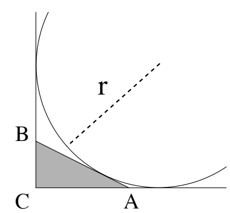
abbia almeno una soluzione intera. Quanto vale n?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 2014, **(D)** 2015, **(E)** *nessuna delle precedenti.*

La risposta è **(E)**. Una soluzione intera x_0 dell'equazione deve dividere il termine noto, dunque $x_0 = 1$ oppure $x_0 = -1$. Ma se $x_0 = -1$ fosse soluzione, si otterrebbe $1 + 2 + 3 + \cdots + 2014 + n = 0$, e dunque n non sarebbe positivo. Per $x_0 = 1$ si ottiene invece

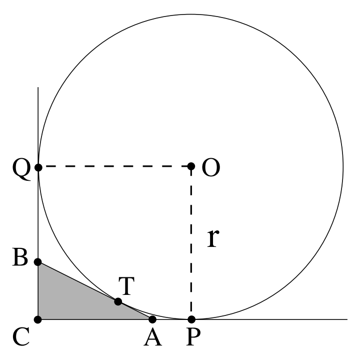
$$(1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2013 - 2014) + n = 0$$

cioè $n = 2014/2 = 1007$.
[Problema proposto da S. Mongodi.]

Problema 16. *Sia ABC un triangolo rettangolo i cui cateti misurano $AC = 2m$ e $BC = 1m$. Consideriamo la circonferenza tangente all'ipotenusa e alle rette che contengono AC e BC, esterna al triangolo ABC: quanto misura il suo raggio r in m?*
(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, **(B)** $\sqrt{5}$, **(C)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, **(D)** 5, **(E)** $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.



La risposta è **(C)**. Sia O il centro della circonferenza, sia T il punto di tangenza della circonferenza con il segmento AB, e siano P e Q rispettivamente i punti di tangenza della circonferenza con le rette contenenti CA e CB:



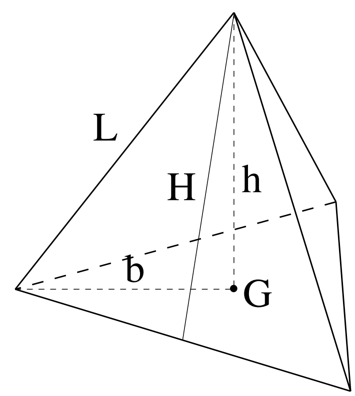
Poiché i punti $OQCP$ formano un quadrato di lato r, si ha $r = QB + BC = PA + AC$. Inoltre $BC = 1$, $AC = 2$, $QB = BT$ e $PA = AT$ e dunque

$$2r = BC + AC + 2QB + 2PA = 3 + 2(BT + AT) = 3 + AB = 3 + \sqrt{5}$$

da cui $r = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
[Problema proposto da Tron.]

Problema 17. *Simone ha un portafortuna a forma di tetraedro regolare, le cui facce hanno lati di lunghezza $6\sqrt{2}$ cm. Qual è il volume del tetraedro in cm^3?*
(A) 36, **(B)** $36\sqrt{2}$, **(C)** 72, **(D)** $72\sqrt{2}$, **(E)** $72\sqrt{3}$

La risposta è **(C)**. Nel caso di un tetraedro regolare di lato $L = 6\sqrt{2}$, le facce sono triangoli equilateri T di lato L ed altezza $H = \sqrt{L^2 - (L/2)^2} = 3\sqrt{6}$. L'area di una faccia vale quindi $A = \frac{1}{2}(6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}) = 18\sqrt{3}$. Il vertice opposto ad una faccia T si proietta perpendicolarmente sul baricentro G del triangolo T, formando quindi un triangolo rettangolo di ipotenusa L, base $b = \frac{2}{3}H = 2\sqrt{6}$ ed altezza $h = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{72 - 24} = 4\sqrt{3}$.



Il volume del tetraedro è uguale dunque a $V = \frac{1}{3}(A \cdot h) = \frac{1}{3}(18\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}) = 72$.
[Problema proposto da S. Monica.]

Problema 18. *Un artista ha realizzato una scultura di pietra che ha la forma di uno strano poliedro. La superficie della scultura è formata da 31 facce triangolari, 18 facce quadrangolari, 11 facce pentagonali e 7 facce esagonali. Quanti spigoli ha il poliedro?*
(A) 65, **(B)** 94, **(C)** 100, **(D)** 123, **(E)** 131.

La risposta è **(E)**. Ogni spigolo di un poliedro è un lato comune a due sue facce. Quindi, se contiamo tutti i lati di tutte le facce che compongono la superficie del poliedro, contiamo gli spigoli due volte. Il totale dei lati dei poligoni che formano la superficie del poliedro è:

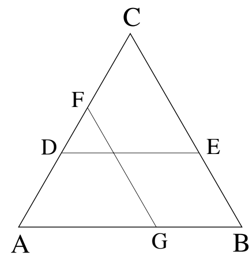
$$31 \cdot 3 + 18 \cdot 4 + 11 \cdot 5 + 7 \cdot 6 = 93 + 72 + 55 + 42 = 262$$

e quindi il numero degli spigoli è: $\frac{262}{2} = 131$.
[Problema proposto da P. Francini.]

Problema 19. *In questa stagione accade spesso che quando Luca esce da scuola piova: ciò accade con probabilità uguale a $\frac{2}{5}$. Per questo motivo Luca ritiene opportuno prendere con sé un ombrello, ma a volte se ne dimentica; la probabilità che in un singolo giorno Luca dimentichi l'ombrello è $\frac{1}{2}$. Qual è la probabilità che per tre giorni consecutivi Luca non si bagni mai, durante il ritorno da scuola?*
(A) *minore di* $\frac{1}{6}$, **(B)** *compresa tra* $\frac{1}{6}$ *e* $\frac{1}{3}$, **(C)** *compresa tra* $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{2}$,
(D) *compresa tra* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{2}{3}$, **(E)** *maggiore di* $\frac{5}{6}$.

La risposta è **(D)**. La probabilità che Luca non si bagni, in un determinato giorno della stagione, è uguale a $p + p'$, dove $p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ è la probabilità che quel giorno non piova, e $p' = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ è la probabilità dell'evento (intersezione di eventi indipendenti), che quel giorno piova e che Luca si ricordi di prendere l'ombrello. La probabilità che Luca non si bagni per tre giorni di fila è allora uguale a $p^3 = (p + p')^3 = (\frac{4}{5})^3 = 0.512$.
[Problema proposto da P. Negrini.]

Problema 20. *Un triangolo equilatero ABC di lato 1 m viene diviso in due parti di area uguale dal segmento DE parallelo ad AB, come in figura; ugualmente, viene diviso in due parti di area uguale dal segmento GF parallelo a BC. Quanti metri è lungo il segmento DF?*
(A) $(\sqrt{2}-1)$, **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(C)** $(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **(E)** $\frac{1}{2}$.



La risposta è **(A)**. Il triangolo CDE è simile al triangolo ABC, ma la sua area vale la metà, dunque il rapporto di similitude è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Analogamente, il triangolo AFG è simile al triangolo ABC, con ugual rapporto di similitudine $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pertanto $DF = 2AF - AC = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$.
[Problema proposto da R. Fratello.]