PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

27 novembre 2013

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	B
2	E
3	E
4	D
5	C
6	C
7	B
8	C
9	C
10	C

Problema	Risposta corretta
11	B
12	C
13	E
14	E
15	D
16	B
17	B
18	B
19	B
20	D

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(B)**.
Sia P la popolazione di Zoranel fino al 2013. La percentuale degli androidi di vigilanza sulla popolazione totale risultava in quell'anno uguale a $q = \frac{5}{100}\frac{60}{100} = \frac{3}{100}$ ed il numero di tali androidi di vigilanza uguale a qP. Dopo l'arrivo degli esiliati, la popolazione salì a $P' = P + \frac{10}{100}P = \frac{11}{10}P$, mentre la percentuale degli androidi di vigilanza sul totale scese al valore $q' = \frac{qP}{P'} = q\frac{10}{11}$. Dunque la percentuale scese di $q - q' = \frac{1}{11}q$, che è inferiore a $\frac{1}{10}q$.
[Problema proposto da A. Sambusetti]

2. La risposta è **(E)**.
Ad ogni lancio della moneta la probabilità di ottenere testa è la stessa, indipendentemente dagli esiti dei lanci precedenti. Dato che la moneta non è truccata questa probabilità è 1/2.
[Problema proposto da P. Leonetti]

3. La risposta è **(E)**.
Consideriamo la funzione g definita da $g(x) = (f(x))^3 + f(x)$; per ogni x si ha
$$g(-x) = (f(-x))^3 + f(-x) = (-f(x))^3 - f(x) = -[(f(x))^3 + f(x)] = -g(x),$$
quindi g è dispari, ovvero la risposta **(E)** è corretta. Proviamo anche che le altre risposte non sono corrette. Scegliendo f definita da $f(x) = x$, che è una funzione dispari, si vede che le funzioni $f(x)-1 = x-1$ e $(f(x))^3+1 = x^3+1$ non sono dispari (per esempio, non si annullano per $x = 0$, mentre tutte le funzioni dispari sono nulle per $x = 0$), quindi le risposte **(A)** e **(D)**

non sono corrette. Analogamente la funzione definita da $(f(x))^2 = x^2$ non è dispari, quindi la risposta **(B)** non è corretta; infine la funzione definita da $(f(x))^2 + f(x) = x^2 + x$ non è dispari (infatti, ad esempio, $(-1)^2 + (-1) = 0 \neq -(1^2 + 1) = 2$), quindi la risposta **(C)** non è corretta. [Problema proposto da P. Leonetti]

4. La risposta è **(D)**.
Ricordiamo la formula del cambio di base per i logaritmi; se a, b e c sono tre numeri positivi, e diversi da 1, si ha
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}.$$
Di seguito scriviamo semplicemente log per indicare il logaritmo in base 10. Applicando la formula precedente con $c = 10$, otteniamo
$$\begin{aligned}\log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \ldots \cdot \log_{126}(127) \cdot \log_{127}(128) &= \frac{\log(3)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(4)}{\log(3)} \cdot \ldots \cdot \frac{\log(127)}{\log(126)} \cdot \frac{\log(128)}{\log(127)} \\ &= \frac{\log(128)}{\log(2)} = \frac{\log(2^7)}{\log(2)} = 7.\end{aligned}$$
[Problema proposto da P. Leonetti.]

5. La risposta è **(C)**.
Sia H l'altezza del trapezio ed h l'altezza del triangolo EDC sulla base DC. Considerando la retta parallela alle basi del trapezio e passante per E, segue dal teorema di Talete che $h = \frac{1}{2}H$. L'area del triangolo è allora $\mathcal{A}(DCE) = \frac{1}{2}(h \cdot DC) = \frac{1}{4}(H \cdot DC)$ mentre l'area del trapezio è uguale a $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + DC)H$. Dunque $\frac{\mathcal{A}(DCE)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{DC}{2(AB+DC)} = \frac{DC}{2(3DC+DC)} = \frac{1}{8}$.
[Problema proposto da P. Negrini]

6. La risposta è **(C)**.
Indichiamo con ABC il triangolo, con A il vertice comune alla circonferenza, e con B',C' rispettivamente i due punti di intersezione dei lati AB, AC con essa. Notiamo che, per simmetria, il lato $B'C'$ è parallelo a BC, dunque $AB'C'$ è simile a ABC ed è equilatero. Il centro del cerchio coincide dunque col baricentro del triangolo $AB'C'$; se $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ è il raggio del cerchio, l'altezza h del triangolo $AB'C'$ vale allora $h = \frac{3}{2}r$ ed il lato $AB' = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \sqrt{3}r$. L'area del triangolo più piccolo vale quindi $\mathcal{A}(AB'C') = \frac{1}{2}h \cdot AB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, mentre l'area della parte di cerchio non coperta dal triangolo vale $\mathcal{A} = \frac{2}{3}[\pi r^2 - \mathcal{A}(AB'C')] = \frac{2}{3}[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}]r^2 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
[Problema proposto da C. Balocchi]

7. La risposta è **(B)**.
Indichiamo i vertici del cubo con le lettere da A a H, in modo che $ABCD$ (in quest'ordine) sia una faccia; chiamiamo E, F, G, H i vertici della faccia opposta, in modo che il vertice A sia collegato con uno spigolo ad E, il vertice B sia collegato ad F, il vertice C a G, e infine D ad H. Il percorso $ABCDHGFE$ è un percorso lungo 7 che tocca tutti i vertici del cubo.
Per dimostrare che non ne esiste uno più corto, osserviamo che ogni percorso che tocca tutti e gli 8 vertici del cubo è costituito da (almeno) 7 percorsi che partono da un vertice del cubo e ne raggiungono un altro. Ma visto che due vertici qualunque del cubo distano tra loro almeno 1, la lunghezza totale deve essere almeno 7.
[Problema proposto da F. Poloni]

8. La risposta è **(C)**.
Le coppie sono del tipo $(k, k+1007)$. Sappiamo che k divide $k+1007$ se e solo se k divide 1007.

Poiché $1007 = 19 \cdot 53$, e dato che i numeri 19 e 53 sono primi, gli unici k possibili risultano $k = 1, 19, 53, 1007$.
[Problema proposto da G. Barbarino]

9. La risposta è **(C)**.
In base ai dati del problema dobbiamo scrivere 2014 come somma di potenze di 2 distinte tra loro. Poiché $2^{11} = 2048 > 2014$, dobbiamo usare potenze con esponente minore o uguale a 10; poiché inoltre 2014 è pari, e tutte le potenze di due tranne $2^0 = 1$ sono pari, possiamo escludere 1. Dunque dobbiamo scrivere 2014 come somma di alcuni tra i numeri:

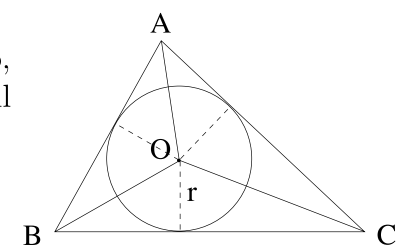
$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64, \quad 128, \quad 256, \quad 512, \quad 1024,$$

prendendo ciascuno di loro al più una volta. In effetti questo è possibile in uno e un solo modo, che è il seguente

$$2014 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2.$$

Gli addendi necessari per ottenere 2014 in questo modo sono 9, che è anche la risposta al problema.
[Problema proposto da G. Barbarino]

10. La risposta è **(C)**.
Siano r ed O rispettivamente il raggio ed il centro del cerchio inscritto, e siano a, b e c le lunghezze dei lati opposti ai vertici A, B, C. Se p è il semiperimetro del triangolo, l'area del triangolo vale allora



$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AOC) + \mathcal{A}(AOB) + \mathcal{A}(BOC) = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = rp$$

Dunque, per la formula di Erone,

$$r = \mathcal{A}(ABC)/p = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{15}/6$$

e l'area del cerchio inscritto vale allora $\pi r^2 = 5\pi/12$.
[Problema proposto da A. Sambusetti]

11. La risposta è **(B)**.
Ponendo $t = y^k$ l'equazione è equivalente all'equazione di secondo grado in t

$$t^2 - x^k t + x^{2k} = 0.$$

Questa equazione ha discriminante $\Delta = x^{2k} - 4x^{2k}$, che è negativo a meno che $x = 0$; esiste quindi una soluzione solo se $x = 0$, nel qual caso si ottiene immediatamente $y = t = 0$.
[Problema proposto da P. Leonetti]

12. La risposta è **(C)**.
Poiché $DC = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}(BD + DC)$, si ha $BD = 2DC$. D'altra parte, dal teorema della bisettrice deduciamo che $AB : AC = BD : DC = 2$; segue che il perimetro vale

$$AB + AC + BC = 2AC + AC + 3CD = 3(AC + CD) = 36.$$

[Problema proposto da G. Barbarino]

13. La risposta è **(E)**.
Consideriamo il numero $n = 2^5 = 32$ che ha esattamente 6 divisori: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Il suo quadrato $n^2 = 2^{10} = 1024$ ha esattamente 11 divisori, ovvero tutti i numeri della forma 2^k, con $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Questo esempio porta ad escludere le risposte **(B)**, **(C)** e **(D)**. D'altra parte se consideriamo $n = 12$ vediamo che anch'esso ha esattamente 6 divisori: 1, 2, 3, 4, 6, 12; il suo quadrato $n^2 = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ ha come divisori tutti i numeri della forma $2^k \cdot 3^h$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e $h = 0, 1, 2$, che sono in tutto 15. Quindi la risposta **(A)** non è corretta e vediamo che il numero di divisori di n^2 in generale dipende da n.
[Problema proposto da A. Bianchi]

14. La risposta è **(E)**.
Scriviamo il polinomio $p(x)$ in forma estesa, indicando con N il suo grado:

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N$ sono i coefficienti di $p(x)$ e sono tutti numeri interi. Segue che

$$p(169) - p(1) = a_N(169^N - 1) + a_{N-1}(169^{N-1} - 1) + \ldots + a_1(169 - 1).$$

Osserviamo ora che ciascun termine $a_k(169^k - 1)$, comunque si scelga l'esponente k (intero e maggiore o uguale a 1), è divisibile per $(169 - 1) = 168$; vale infatti l'identità

$$y^k - 1 = (y - 1)(y^{k-1} + y^{k-2} + \ldots + y + 1)$$

per ogni numero reale y. Quindi $p(169) - p(1)$ è somma di numeri divisibili per 168, e dunque è anch'esso divisibile per 168. In particolare, poiché 56 divide 168, $p(169) - p(1)$ è divisibile per 56, quindi la risposta **(E)** è corretta. Osserviamo anche che, scegliendo $p(x) = x^2$ si ha $p(169) - p(1) = 169^2 - 1 = 168 \cdot 170$ che non è divisibile né per 25, né per 32, né per 36, né per 49. Quindi le risposte **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** non sono corrette.
[Problema proposto da G. Barbarino]

15. La risposta è **(D)**.
Scegliendo opportunamente i coefficienti del sistema si vede che le soluzioni cercate possono essere infinite. Siano infatti $a = b = c = d = e = f = 1$. In questo caso le due equazioni coincidono con l'equazione $x^2 + xy = 1$. Scelto comunque x strettamente compreso tra 0 e 1, se poniamo

$$y = \frac{1 - x^2}{x}$$

la coppia (x, y) è soluzione del sistema. Occorre verificare se y è compresa tra 0 e 1. Poiché $0 < x < 1$, si ha certamente $y > 0$; inoltre, sapendo che $x > 0$, si hanno le seguenti equivelanze:

$$y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - x^2}{x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

Dal momento che $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$, per ogni x strettamente compreso tra $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e 1 la coppia $\left(x, \frac{1-x^2}{x}\right)$ è soluzione del sistema. Quindi le soluzioni possono essere infinite.
[Problema proposto da P. Leonetti]

16. La risposta è **(B)**.
Se N è un numero naturale, il numero di zeri con cui esso termina (scritto in base 10) coincide con la massima potenza di dieci che divide N. Questo fatto continua ad essere vero in una qualsiasi base b: il numero di zeri con cui termina N scritto in base b coincide con la massima potenza di b che divide N.
Sia ora $N = n!$, con n numero naturale; cerchiamo la massima potenza di 5 che divide N (il ragionamento che segue funziona anche sostituendo 5 con un qualsiasi numero primo). L'idea è che nel moltiplicare tutti i numeri k da 1 a n, via via che k aumenta incontreremo vari multipli di 5; per ogni k che è un multiplo di 5, la potenza di 5 che divide N aumenta almeno di 1. Più precisamente: se k è multiplo di 5 ma non di 5^2, la potenza aumenta esattamente di 1; se k è multiplo di 5^2 ma non di 5^3, la potenza aumenta di 2, se k è un multiplo di 5^3 ma non di 5^4 tale potenza aumenta di 3, e così via. Se ad esempio vogliamo calcolare la massima potenza di 5 che divide 26!, osserviamo che nel multiplicare i numeri da 1 a 26 incontriamo i seguenti multipli di 5: 5, 10, 15, 20 (che non sono multipli di 5^2) e 25, che è un multiplo di 5^2; dunque la massima potenza di 5 che divide 26! è: $1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$.
Consideriamo ora $N = 2000!$. Nel moltiplicare tutti i numeri k da 1 a 2000 incontriamo:
- 3 multipli di $625 = 5^4$
- 16 (= 2000/125) multipli di $125 = 5^3$
- 80 (= 2000/25) multipli di $25 = 5^2$
- 400 (2000/5) multipli di 5.

La massima potenza di 5 che divide N è dunque $499 = 400 + 80 + 16 + 3$. Per determinare ora la massima potenza di 10 che divide N occorre trovare anche la massima potenza di 2 che divide N. Questa è senz'altro maggiore di 499, in quanto 2000! contiene il prodotto di 1000 numeri pari, dunque 2000! è divisibile almeno per 2^{1000}. Dunque la massima potenza di 10 che divide N è 499. In conclusione $X = Y$ e la riposta al problema è 0.
[Problema proposto da P. Leonetti]

17. La risposta è **(B)**.
Proviamo che $4^{30} > 5^{25}$. Infatti, estraendo la radice quinta di entrambi i numeri troviamo che la disuguaglianza cercata equivale a $4^6 = 2^{12} = 4096 > 5^5 = 3125$. Proviamo ora che $5^{25} > 3^{33}$; è sufficiente mostrare che $5^{25} > 3^{35}$, che implica la precedente e equivale a $5^5 > 3^7$. Poiché $5^5 = 3125$ e $3^7 = 2187$ tale disuguaglianza è vera. In conclusione $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$.
[Problema proposto da A. Sambusetti]

18. La risposta è **(B)**.
Calcoliamo prima la probabilità che tra le due casse scelte a caso vi sia quella contenente banane radioattive. Le possibili scelte di 2 casse su 5 sono $\binom{5}{2} = 10$. I possibili modi di scegliere 2 delle 4 casse che non contengono banane radioattive sono $\binom{4}{2} = 6$. La probabilità di *non* scegliere la cassa contenente banane radioattive è dunque uguale a $\frac{6}{10}$, mentre quella di sceglierla è $1 - \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$. Indichiamo ora con N il numero di banane radioattive presenti nell'unica cassa che ne contiene. Scegliendo a caso una banana da questa cassa la probabilità che sia radioattiva è $\frac{N}{72}$. Quindi la probabilità che una delle due banane scelte sia radioattiva è:

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{N}{72} = \frac{N}{180}.$$

Sapendo che p è, per ipotesi, uguale a $\frac{5}{100}$, deduciamo che $\frac{N}{180} = \frac{5}{100}$, cioè $N = 9$.
[Problema proposto da F. Getman]

19. La risposta è **(B)**.
I due trinomi p e q possono essere scritti nella forma

$$p(x) = Ax^R + Bx^S + Cx^T, \quad q(x) = ax^r + bx^s + cx^t$$

dove A, B, C, a, b, c sono numeri diversi da zero, R, S, T sono numeri interi maggiori o uguali a zero, distinti tra loro, e lo stesso si può dire per r, s, t. In particolare possiamo supporre: $R > S > T$ e $r > s > t$. Il prodotto tra p e q conterrà in generale 9 termini

$$p(x)q(x) = (Ax^R + Bx^S + Cx^T)(ax^r + bx^s + cx^t) = Aax^{R+r} + \ldots + Ccx^{T+t}$$

ma si potranno verificare delle cancellazioni. D'altra parte i due monomi di grado massimo e di grado minimo Aax^{R+r} e Ccx^{T+t} non potranno essere cancellati da nessun altro monomio, che avrà grado strettamente minore o strettamente maggiore rispetto a loro. Quindi il prodotto tra $p(x)$ e $q(x)$ contiene sicuramente almeno due monomi. Con un opportuno esempio si vede anche che può succedere che ne contenga esattamente due. Proviamo con due trinomi semplici, del tipo

$$(x^2 + ax + b) \cdot (x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

Affinché nel prodotto restino solo i termini di grado 0 e di grado 4, è sufficiente che

$$\begin{cases} c = -a \\ b + d = a^2 \\ ad + bc = a(d - b) = 0 \end{cases}$$

ed effettivamente, scegliendo $c = -a = -1$ e $b = d = \frac{1}{2}$ si ottiene l'identità

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = x^4 + \frac{1}{4}$$

[Problema proposto da F. Poloni]

20. La risposta è **(D)**.
Consideriamo i nove quadratini evidenziati in figura: poiché ogni tessera può coprirne non più di uno alla volta, servono almeno 9 tessere per coprire il quadrato. D'altra parte, è effettivamente possibile coprire tutto il quadrato con sole 9 tessere: è sufficiente coprire le prime due colonne con tre tessere messe in verticale, quindi le seconde due colonne e l'ultima colonna con $3 + 3$ tessere disposte nello stesso modo.
[Problema proposto da L. Pernazza]