PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

22 novembre 2012

ZANICHELLI Best Western

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	C
2	A
3	D
4	A
5	C
6	C
7	D
8	D
9	B
10	D

Problema	Risposta corretta
11	B
12	D
13	E
14	A
15	B
16	B
17	A
18	B
19	E
20	B

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.
Il numero di amici di Marco deve essere un divisore di 1260, e quindi il massimo numero di amici che Marco può avere è il più grande divisore di 1260 che sia anche più piccolo di 100. La scomposizione in fattori primi di 1260 è

$$1260 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7\,,$$

e mostra che $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ è un divisore di 1260 e nessun altro numero compreso tra 90 e 100 lo è. Dunque 90 è il più grande divisore di 1260 che sia anche minore di 100.
[Problema proposto da G. Barbarino.]

2. La risposta è **(A)**.
Indichiamo con X e Y le misure (in una data untià di misura) della base e della altezza del rettangolo, rispettivamente, e con A e B le rispettive misure dei segmenti a e b. Sappiamo che $A + B = Y$ e

$$\frac{\frac{1}{2}\,(B+Y)\cdot X}{\frac{1}{2}\,A\cdot X} = 4\,,$$

e quindi

$$4 = \frac{A+2B}{A} = 1 + 2\,\frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{3}{2}$$

ovvero $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2}{3}$
[Problema proposto da F. Mugelli]

3. La risposta è **(D)**.
Secondo il calendario precedente alla riforma, poiché il quoziente della divisione di 400 per 6 è 66, vi erano 66 giorni festivi. Con il nuovo calendario ogni mese ci sono 6 giorni festivi e quindi in un anno ci sono 60 giorni festivi. I giorni festivi sono allora passati da 66 a 60 e la diminuzione, 6, è minore del 10% di 66, che è 6,6.
[Problema proposto da P. Negrini.]

4. La risposta è **(A)**.
Il volume di una sfera di raggio R è $\frac{4\pi R^3}{3}$, mentre la sua superficie è $4\pi R^2$. Indichiamo con R_1 e R_2 i raggi di S_1 e S_2 rispettivamente. Sappiamo che
$$\frac{\frac{4\pi R_2^3}{3}}{\frac{4\pi R_1^3}{3}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 2\,.$$
Dunque
$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \frac{R_2^2}{R_1^2} = \sqrt[3]{4}\,.$$
Poiché il rapporto tra la superficie di S_2 e quella di S_1 coincide con $\frac{R_2^2}{R_1^2}$, esso vale $\sqrt[3]{4}$.
[Problema proposto da P. Leonetti.]

5. La risposta è **(C)**.
La velocità media nel percorso casa-scuola-casa è data dalla lunghezza del percorso complessivo, ovvero 4 km (2 per andare e 2 per tornare), diviso il tempo totale impiegato, ovvero 16 minuti (12 per andare e 4 per tornare). Dunque la velocità media è di 0,25 km/min, che coincide con 15 km/h.
[Problema proposto da S. Monica.]

6. La risposta è **(C)**.
Indichiamo con O il centro del quadrato, con K il vertice del quadrato che appartiene al lato AC e con $2x$ la lunghezza in metri della diagonale del quadrato. Per la similitudine dei triangoli AHC e KOC, abbiamo che
$$\frac{CH}{AH} = \frac{OC}{KO} = \frac{2-x}{x}\,.$$
Ma
$$\frac{CH}{AH} = \frac{2 \text{ m}}{0{,}5 \text{ m}} = 4\,.$$
Da qui si ottiene $x = \frac{2}{5}$ m e quindi $HK = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ m. L'area del quadrato è allora $\frac{8}{25}$ m^2.
[Problema proposto da U. Bindini e A. Sambusetti.]

7. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con F_b e F_c le percentuali di femmine bionde e castane rispettivamente, e con M_b e M_c le percentuali di maschi biondi e castani rispettivamente. Sappiamo che $F_b + M_b = 40$ e $F_b + F_c = M_b + M_c = 50$. Le femmine bionde sono il 75% del totale degli alunni biondi e quindi i maschi biondi sono il 25% del totale degli alunni biondi, quindi $F_b = 3M_b$. Allora troviamo, dalla prima delle due uguaglianze scritte in precedenza, $M_b = 10$, e quindi da $M_b + M_c = 50$ abbiamo $M_c = 40$.
[Problema proposto da S. Monica.]

8. La risposta è **(D)**.
Consideriamo una mattonella esagonale M del pavimento, che sia circondata da sei mattonelle esagonali e supponiamo di colorare questa mattonella di blu. A questo punto nessuna delle sei mattonelle che la circondano può essere colorata di blu e due di esse che siano adiacenti devono avere colori diversi, ovvero rosso e nero. Quindi fissato il colore di M ci sono due possibili modi di colorare le sei mattonelle ad essa adiacenti. Poiché ci sono 3 possibili colorazioni per M, e per ciascuna di esse ci sono due colorazioni delle mattonelle adiacenti, ci sono 6 modi distinti di colorare M e le 6 mattonelle adiacenti, in modo che le richieste del problema siano soddisfatte. Osserviamo poi che fissato il colore della mattonella M e di quelle ad essa adiacenti, la colorazione del resto del pavimento è univocamente determinata. Quindi ci sono 6 modi di colorare il pavimento.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

9. La risposta è **(B)**.
Osserviamo che $p^q + 1$ è pari se p^q è dispari, e viceversa è dispari se p^q è pari. Poiché l'unico numero primo pari è 2, affinché $p^q + 1$ sia primo esso deve essere uguale a 2 oppure deve essere dispari. Ma $p^q + 1 = 2$ implica $p^q = 1$ il che è impossibile. Dunque dobbiamo avere che p^q è pari, e quindi p deve essere pari, ed essendo primo si deve avere $p = 2$. Se q è dispari $p^q + 1$ ammette la scomposizione:

$$(p^q + 1) = (p + 1)(p^{q-1} - p^{q-2} + \cdots + p^2 - p + 1)$$

e quindi in particolare è divisibile per $p + 1$ e pertanto non può essere primo. Allora anche q deve essere pari e quindi $q = 2$. L'unica possibilità è allora $p = q = 2$.

10. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con B il prezzo della benzina oggi, e con P ed O rispettivamente il costo del prodotto e il costo del petrolio, sempre riferiti ad oggi. Sappiamo che

$$P = \frac{35}{100}\, B \quad \text{e} \quad O = \frac{24}{100}\, P$$

quindi

$$O = \frac{24 \cdot 35}{100 \cdot 100}\, B = \frac{8,4}{100}\, B\,.$$

Di conseguenza oggi il costo del petrolio costituisce l' 8,4% del prezzo della benzina. Se il costo del petrolio aumenta del 10% (ovvero di un decimo) e tutti gli altri costi rimangono invariati, il prezzo della benzina aumenterà di un decimo dell'8,4%, ovvero dello 0,84%.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

11. La risposta è **(B)**.
Sviluppando il cubo del binomio possiamo scrivere

$$(10^{2013} + 1)^3 = 10^{6039} + 3 \cdot 10^{4026} + 3 \cdot 10^{2013} + 1\,.$$

Ciascuno dei 4 numeri a destra dell'uguaglianza, scritti in base 10, ha una sola cifra diversa da zero e in una posizione diversa da quella degli altri, quindi la somma delle cifre del numero che si ottiene sommandoli è $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

12. La risposta è **(D)**.
Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) \\ &= n(n^2-4)(n^2-1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\,. \end{aligned}$$

Dunque stiamo considerando un numero che può sempre essere scritto come prodotto di cinque numeri naturali consecutivi (tutti strettamente positivi, poiché $n \geq 3$). In una sequenza di 5 numeri naturali consecutivi vi sono certamente due numeri pari di cui uno multiplo di 4, un multiplo di 3 e un multiplo di 5. Dunque il loro prodotto è certamente multiplo di $120 = 2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5$. D'altra parte per $n = 3$ abbiamo $n^5 - 5n^3 + 4n = 120$ quindi 120 è il più grande divisore di $n^5 - 5n^3 + 4n$ al variare di $n \geq 3$.

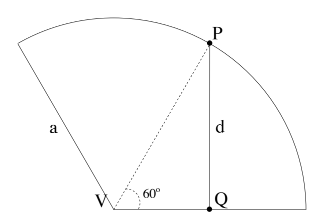
13. La risposta è **(E)**.
Nessuna delle espressioni contenute nelle altre risposte è minore o uguale di $\dfrac{1}{6} + x^2$ per ogni x.
Difatti, se per esempio $x = 0$ il numero $\sqrt{\frac{1}{6} + x^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} > \frac{1}{6}$, quindi **(A)** è falsa.
Anche la risposta **(D)** è evidentemente falsa se $0 < x < 1$, poiché in tal caso $\frac{1}{6} + x > \frac{1}{6} + x^2$.
Sviluppando il quadrato del binomio, si trova anche che non può valere **(C)**:

$$\left(\frac{1}{6} + x\right)^2 = \frac{1}{36} + x^2 + \frac{1}{3}x > \frac{1}{6} + x^2$$

per $x > \frac{15}{36}$. Proviamo infine che anche la risposta **(B)** è errata: in effetti

$$\frac{1}{6} + x^2 \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}x \qquad \Leftrightarrow \qquad 6\sqrt{3}x^2 + 12x + \sqrt{3} \geq 0$$

ed il discriminante del trinomio $6\sqrt{3}x^2 + 12x + \sqrt{3}$ vale $\Delta = 144 - 24 \cdot 3 > 0$; dunque il trinomio ammette due radici reali distinte ed è negativo per ogni valore di x strettamente compreso tra le due radici.
[Problema proposto da G. Barbarino e A. Sambusetti.]

14. La risposta è **(A)**.


Calcoliamo prima di tutto l'apotema del cono: $a = \sqrt{r^2 + h^2} = 30$cm. Tagliamo ora il cono lungo l'apotema passante per Q, e otteniamo così un settore circolare di centro V, raggio a ed arco di circonferenza di lunghezza uguale a $2\pi r$: l'angolo al centro che sottende tale arco misura dunque $\vartheta = \frac{2\pi r}{a} = \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{2}{3}\pi$ radianti.
Il problema si riduce quindi a trovare la lunghezza del segmento che congiunge il punto medio P dell'arco di circonferenza al punto medio Q di uno dei due raggi delimitanti il settore circolare. Poiché l'angolo $\widehat{PVQ} = 60°$, segue che PQ è perpendicolare al raggio contenente Q, dunque $d = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 15\sqrt{3}$.
[Problema proposto da Nirvana.]

15. La risposta è **(B)**.
Gli eventi possibili dopo aver lanciato i due dadi possono essere rappresentati da tutte le coppie ordinate (d_1, d_2) in cui d_1 è il valore del primo dado e d_2 quello del secondo; poichè d_1 può variare tra 4 possibili valori e d_2 tra otto possibili valori, il numero totale di eventi è 32. Osserviamo che per ciascun valore d_1 del dado a 4 facce c'è uno e un solo valore d_2 del dado a 8 facce la cui somma con d_1 sia 11. Quindi gli eventi favorevoli, ovvero le coppie (d_1, d_2) tali che a somma $d_1 + d_2$ sia 11, sono 4, su un totale di 32. La probabilità che si verifichi un evento favorevole è allora $\dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
[Probema proposto da S. Mongodi.]

16. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con n la soluzione intera dell'equazione $x^{10} + kx^2 + 4 = 0$; osserviamo che $n \neq 0$ altrimenti l'equazione non è verificata. Possiamo scrivere:
$$n^{10} + kn^2 + 4 = 0$$
$$k = -n^8 - \frac{4}{n^2}\,.$$
Dunque, dato che k è intero e n^8 è intero, $\frac{4}{n^2}$ è intero, e quindi n^2 divide 4 e quindi può essere solo $n = \pm 1$, $n = \pm 2$. Nel primo caso abbiamo $k = -5$ e nel secondo $k = -2^8 - 1$. k può assumere solo due valori.
[Problema proposto da P. Leonetti.]

17. La risposta è **(A)**.
Un numero è congruo modulo 11 alla somma delle sue cifre, prese a segni alterni (partendo dal segno positivo per la cifra delle unità). Consideriamo allora un quadrato di due cifre che si scriva, in notazione decimale, come ab; notiamo subito che $-8 \leq a - b \leq 9$ e che sicuramente $a \neq b$, $a \neq b - 1$ (sennò ab non è un quadrato). Ciò significa che la differenza $a - b$ è congrua, modulo 11, ad un numero intero x compreso tra 1 e 9. Pertanto, qualsiasi sia il quadrato ab assegnato, esiste sempre una e una sola cifra x compresa tra 1 e 9 tale che $x - a + b$ sia congruo a zero modulo 11, cioè tale che xab sia divisibile per 11. La probabilità è dunque uguale a $\frac{1}{9}$.
[Problema proposto da S. Mongodi.]

18. La risposta è **(B)**.
Rappresentiamo una generica disposizione di 6 frutti con una sequenza di 6 lettere, ciascuna delle quali può essere una P (pera) o una M (mela). Vogliamo contare le sequenze in cui tra due M non ci sia nessuna P; per comodità chiamiamo queste sequenze *accettabili*. Come regola generale, una sequenza è accettabile se tutte le M in essa contenute sono adiacenti l'una all'altra, cioè consecutive; questa osservazione rende più facile contare le sequenze accettabili perché in una sequenza accettabile la posizione delle M è univocamente determinata una volta che si sia individuata la *prima* M (quella più a sinistra) e il numero complessivo di M presenti nella sequenza. Utilizzando questo fatto scriviamo allora le possibili sequenze in base al numero di M che esse contengono, partendo dal valore massimo in cui ci sono 6 M (ovvero i 6 frutti sono tutte mele), fino a quello minimo in cui non c'è nessuna M:

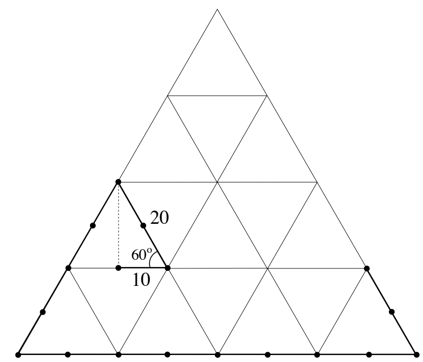
- se ci sono 6 M si ha 1 sequenza accettabile:
$$MMMMMM\,.$$
- se ci sono 5 M si hanno 2 sequenze accettabili:
$$MMMMMP\,, \quad PMMMMM\,.$$

- se ci sono 4 M si hanno 3 sequenze accettabili:
$$MMMMPP\,,\quad PMMMMP\,,\quad PPMMMM\,.$$
- se ci sono 3 M si hanno 4 sequenze accettabili:
$$MMMPPP\,, PMMMPP\,, PPMMMP\,, PPPMMM\,.$$
- se ci sono 2 M si hanno 5 sequenze accettabili:
$$MMPPPP\,, PMMPPP\,, PPMMPP\,, PPPMMP\,, PPPPMM\,.$$
- se c'è una sola M si hanno 6 sequenze accettabili:
$$MPPPPP\,, PMPPPP\,, PPMPPP\,, PPPMPP\,, PPPPMP\,, PPPPPM\,.$$
- infine, l'unica sequenza senza M è accettabile:
$$PPPPPP\,.$$

In tutto abbiamo allora $1+2+3+4+5+6+1 = 22$ sequenze accettabili.
[Problema proposto da P. Leonetti.]

19. La risposta è **(E)**.
La cavalletta percorre la spezzata evidenziata in figura, costruita sui lati di triangoli equilateri tra loro adiacenti, in cui i punti rappresentano la posizione in cui essa si trova all'inizio e dopo ogni salto. Ne segue che dopo 17 salti la cavaletta si trova precisamente a $5 \cdot 10$ cm di distanza dal punto iniziale.

[Problema proposto da S. Monica.]



20. La risposta è **(B)**.
Consideriamo la funzione polinomiale $f(t) = (t-1)(t+1)^{2012} - 1$. Per $t > 1$ questa funzione è crescente, in quanto entrambe le funzioni $(t-1)$ e $(t+1)^{2012}$ lo sono, e dunque lo è il loro prodotto. Si ha per ipotesi $f(x) = 0$ mentre
$$f\left(1 + \frac{1}{3^{2012}}\right) = \frac{1}{3^{2012}}\left(\frac{1}{3^{2012}} + 2\right) - 1 < \frac{3}{3^{2012}} - 1 < 0$$
pertanto $1 + \frac{1}{3^{2012}} < x$. D'altra parte, poiché sappiamo che $x > 1$, da $f(x) = 0$ deduciamo immediatamente che
$$x = 1 + \frac{1}{(x+1)^{2012}} < 1 + \frac{1}{2^{2012}}$$
[Problema proposto da S. Mongodi.]