PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni biennio

17 novembre 2010

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	C
2	B
3	C
4	A
5	D
6	E
7	E
8	C
9	A
10	D

Problema	Risposta corretta
11	C
12	C
13	D
14	B
15	C
16	B
17	A
18	A
19	E
20	B

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.
Se il primo dei 45 giorni è un lunedì, allora ci sono 7 lunedì posti nei giorni: 1, 8, 15, 22, 29, 36 e 43. Dunque ci possono essere 7 lunedì. D'altra parte se ce ne fossero 8 (o di più), ci sarebbero 7 settimane, ovvero 49 giorni, in 45 giorni, e questo è impossibile.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

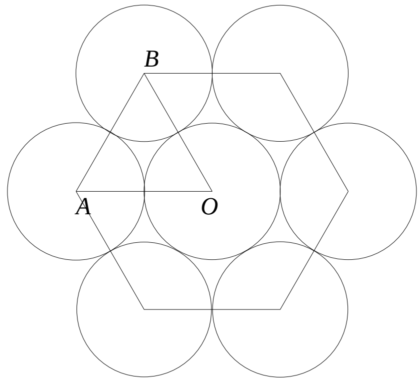
2. La risposta è **(B)**.
Poichè nella cesta ci sono calzini di tre colori diversi, se Emilio ne prende quattro, tra questi ce ne sono sicuramente due dello stesso colore. D'altra parte, se ne prende solo tre, è possibile che siano di tre colori diversi tra loro. Il numero minimo è quindi quattro.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

3. La risposta è **(C)**.
Il triangolo BCD è equilatero, quindi BD misura 100 m. Inoltre l'angolo $\widehat{DBC}$ è di 60° e $\widehat{ABC}$ è il suo angolo complementare, quindi i punti A, B e D sono allineati. Ne segue che la misura del segmento AD è la somma delle misure di AC e di BD, ovvero 200 m.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

4. La risposta è **(A)**.
In tutte le serie di disuguaglianze figurano i tre numeri $A = 2\sqrt{2}$, $B = \sqrt{10}$ e $C = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, che elevati al quadrato fanno rispettivamente: $A^2 = 8$, $B^2 = 10$, $C^2 = 5+3+2\sqrt{15} = 8+\sqrt{15}$. Quindi $A^2 < B^2$, e, poiché $\sqrt{15} > 2$, $B^2 < 8 + \sqrt{15} = C^2$. Dunque $A^2 < B^2 < C^2$, e, dato che

A, B e C sono positivi, segue che $A < B < C$, ovvero $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

5. La risposta è **(D)**.
   I centri del cerchio centrale giallo e dei primi due petali che Matilde dispone, indicati rispettivamente con O, A e B nella figura, formano un triangolo equilatero.

   In particolare l'angolo $\widehat{AOB}$ è di 60°, 1/6 dell'angolo giro. Quindi il sesto petalo che viene disposto è tangente al primo, e al cerchio giallo, e completa la configurazione.
   [Problema proposto da C. Bianchi.]

6. La risposta è **(E)**.
   Abbiamo: $a + b \geq 0$, $b + c \geq 0$ e $a + c \geq 0$. Sommando termine a termine queste tre disuguaglianze otteniamo $2(a + b + c) \geq 0$, e quindi $a + b + c \geq 0$. Osserviamo anche che scegliendo $a = -1$ e $b = c = 10$ si vede che le affermazioni **(A)**, **(B)** e **(D)** non sono verificate; analogamente, scegliendo $a = b = c = 1$ si vede che l'affermazione **(C)** non è verificata.
   [Problema proposto da A. Colesanti.]

7. La risposta è **(E)**.
   Supponiamo che Concetta colori lo stato centrale A di rosso. A questo punto, poiché A confina con ogni altro stato, non può colorare di rosso nessun altro stato e quindi ha a disposizione due soli colori per colorare gli altri stati diversi da A. Supponiamo allora che colori lo stato B di verde; allora è obbligata a colorare C, confinante con B, di giallo e succesivamente deve colorare: D di verde, E di giallo, F di verde, G di giallo. Altrimenti, sempre supponendo che abbia colorato A di rosso, può colorare B di giallo e di conseguenza deve colorare tutti gli altri stati con colori alternati tra il giallo e il verde, ottenendo così una seconda colorazione. Comunque, una volta scelto il colore di A, le possibili colorazioni sono solo due, ciascuna corrispondente alla scelta del colore di B. Poiché per il colore di A ci sono tre possibilità, si hanno in tutto $3 \times 2 = 6$ possibili colorazioni distinte.
   [Problema proposto da R. Morandin.]

8. La risposta è **(C)**.
   Chiamiamo L la lunghezza in metri di AB e indichiamo con v_a e v_b le velocità, in metri al secondo, di Alberto e Barbara rispettivamente. Al momento del primo incontro Alberto cammina da $\dfrac{L-700}{v_a}$ secondi e Barbara cammina da $\dfrac{700}{v_b}$ secondi, quindi

$$\frac{L-700}{v_a} = \frac{700}{v_b}\,,$$

da cui possiamo trovare il rapporto tra le due velocità:

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{L - 700}{700}\,.$$

Analogamente, al momento del secondo incontro Alberto ha percorso $(2L - 400)$ m e quindi cammina da $\dfrac{2L-400}{v_a}$ secondi mentre Barbara, che ha percorso $(L + 400)$ m, cammina da $\dfrac{L+400}{v_b}$ secondi. Quindi

$$\frac{2L - 400}{v_a} = \frac{L + 400}{v_b}\,,$$

da cui

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{2L - 400}{L + 400}\,.$$

Uguagliando tra loro i due valori del rapporto tra le due velocità che abbiamo ottenuto troviamo

$$\frac{L - 700}{700} = \frac{2L - 400}{L + 400}\,.$$

Da questa uguaglianza segue

$$L^2 - 1700\,L = L(L - 1700) = 0\,.$$

Poichè L deve essere strettamente positivo, troviamo $L = 1700$.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

9. La risposta è **(A)**.
Luca scrive alla lavagna $2010 : 2 = 1005$ numeri. Osserviamo inoltre che $2010 = 670 \times 3$ e quindi ci sono 670 multipli di tre compresi tra 2 e 2010 (di cui il primo è 3). Questi multipli di tre sono alternativamente uno pari e uno dispari, quindi quelli scritti da Luca, ovvero i multipli pari di tre, sono la metà di 670, cioè 335. Quindi Giovanni cancella 335 numeri e ne rimangono $1005 - 335 = 670$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

10. La risposta è **(D)**.
Chiamiamo C il numero iniziale di corsie e x il valore della percentuale X (cioè il numero senza il simbolo di percentuale). Dopo l'aumento del 60% il numero di corsie diventa

$$C + C\left(\frac{60}{100}\right) = \frac{8}{5}\,C\,.$$

Dopo la riduzione il numero di corsie diventa

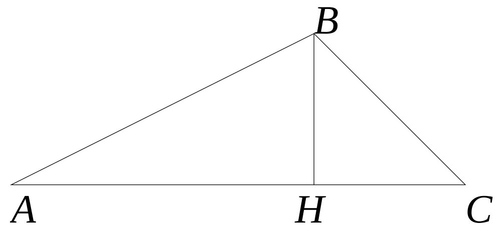
$$\frac{8}{5}\,C - \frac{8}{5}\,C\,\frac{x}{100} = \frac{8}{5}\,C\,\left(1 - \frac{x}{100}\right)\,,$$

e questo numero deve coincidere con il numero iniziale C, quindi

$$\frac{8}{5}\,C\,\left(1 - \frac{x}{100}\right) = C\,.$$

Da questa equazione, dopo aver diviso entrambi i termini per C, si può ricavare il valore $x = 37,5$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

11. La risposta è **(C)**.
Facendo riferimento alla figura, se $\widehat{CAB}$ misura $30°$ e $\widehat{ABC}$ misura $105°$, e BH è l'altezza relativa a AC, si ha che $\widehat{ABH}$ misura $60°$ e $\widehat{HBC}$ misura $45°$.



Dunque ABH è metà di un triangolo equilatero di lato 2 cm, da cui ricaviamo che BH misura 1 cm e AH misura $\sqrt{3}$ cm. Inoltre BHC è un triangolo rettangolo isoscele, quindi HC misura 1 cm come BH e l'ipotenusa BC misura $\sqrt{2}$ cm. Il perimetro richiesto è allora $\overline{AH} + \overline{HC} + \overline{BC} + \overline{AB} = (\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} + 2) = (3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm.
[Problema proposto da F. Poloni.]

12. La risposta è **(C)**.
Prima soluzione. Chiamiamo S la somma richiesta; osserviamo che il numero di termini della somma è $1 + 34 \times 2 + 1 = 70$. Possiamo scrivere

$$\begin{array}{lcccccccc} S = 1 & + & 2 & + & \dots & + & 35 & + & 36 \\ S = 36 & + & 35 & + & \dots & + & 2 & + & 1\,. \end{array}$$

Notiamo che la somma di ogni coppia di termini incolonnati è sempre uguale a 37. Qundi se sommiamo termine a termine le due uguaglianze scritte sopra troviamo che $2S$ è pari alla somma di 70 termini tutti uguali a 37. Dunque $2S = 37 \times 70$ e quindi $S = 37 \times 35 = 1295$.

Seconda soluzione. Possiamo raggruppare i termini della somma richiesta S nel modo seguente

$$\begin{aligned} S &= (1+2) + (2+3) + (3+4) + \cdots + (34+35) + (35+36) \\ &= 3 + 5 + 7 + \cdots + 69 + 71 = (1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 69 + 71) - 1\,. \end{aligned}$$

Quindi S è la somma di tutti i numeri dispari consecutivi da 1 a 71, diminuita di 1. Osserviamo ora che quando si sommano i numeri dispari consecutivi compresi tra 1 e un certo numero dispari, si trova sempre un quadrato perfetto, e più precisamente, se l'ultimo numero dispari che si è sommato è $(2k-1)$, si trova k^2. In altre parole vale l'uguaglianza

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2\,.$$

Questa può essere facilmente verificata per i primi valori di $k = 1, 2, 3, \dots$, e può essere dimostrata per ogni scelta di k usando il principio di induzione. Nel caso del problema in questione abbiamo $71 = 2 \times 36 - 1 = 2k - 1$, con $k = 36$. Utilizzando la formula riportata sopra troviamo

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2 \times 36 - 1) = 36^2 = 1296\,,$$

da cui segue $S = 1296 - 1 = 1295$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

13. La risposta è **(D)**.
I numeri da 1 a 9 (compresi) danno 9 cifre. I numeri da 10 a 99 (compresi) sono 90 e danno 2

cifre ciascuno, quindi danno comlessivamente 180 cifre. I numeri da 100 a 999 (compresi) sono 900 e danno complessivamente $900 \times 3 = 2700$ cifre. I numeri da 1000 a 2010 (compresi) sono 1011 e danno complessivamente $4 \times 1011 = 4044$ cifre. Il numero richiesto è allora formato da $(9 + 180 + 2700 + 4044) = 6933$ cifre.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

14. La risposta è **(B)**.
In un esagono gli angoli interni ai vertici sono di 120°, quindi l'angolo $\widehat{ABC}$ misura 120°. Per motivi di simmetria la retta per B ed E è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$, dunque $\widehat{AGB}$ misura 60°. Inoltre le due diagonali AC e BE si intersecano perpendicolarmente. Quindi il triangolo ABG è metà di un triangolo equilatero di lato 1 cm la cui area è $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2, quindi la sua area è $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ cm^2.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

15. La risposta è **(C)**.
Il numero 112233445566778899 ha 18 cifre e può essere scritto come:

$$\begin{aligned} 112233445566778899 &= 11 \times 10^{16} + 2233445566778899 \\ &= 11 \times 10^{16} + 22 \times 10^{14} + 33445566778899 \\ &\;\vdots \\ &= 11 \times 10^{16} + 22 \times 10^{14} + \cdots + 88 \times 10^2 + 99\,. \end{aligned}$$

Quindi, se lo dividiamo per 11 otteniamo

$$\begin{aligned} (112233445566778899)/11 &= 10^{16} + 2 \times 10^{14} + \cdots + 8 \times 10^2 + 9 \\ &= 10203040506070809\,, \end{aligned}$$

che è un numero di 17 cifre.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

16. La risposta è **(B)**.
Scriviamo un generico numero di 4 cifre, che ha le proprità richieste dal problema, come $mcdu$, ovvero m, c, d e u indicano rispettivamente la cifra delle migliaia, delle centinaia, delle decine e delle unità. La cifra m non deve soddisfare nessuna condizione, e quindi può variare da 1 a 9, indipendentemente dalle altre. Sulle cifre c, d e u sappiamo che ciascuna di loro varia tra 0 e 9 e $c + d = u$. Supponiamo che $u = 0$, allora necessariamente $c = d = 0$. Dunque se $u = 0$ abbiamo una sola possibiltà per c e d. Se $u = 1$, abbiamo due possibilità: $c = 1$ e $d = 0$ oppure $c = 0$ e $d = 1$. Analogamente, se $u = 2$ si vede che ci sono tre possibilità. In generale, per ogni scelta di u ci sono tante possibilità di scegliere c e d quanti sono i modi distinti di scrivere u come somma di due nuneri interi compresi tra 0 e 9, e questi modi distinti sono esattamente $u + 1$. Quindi le possibili scelte per le cifre c, d e u sono in totale

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55\,.$$

Per ciascuna di queste scelte abbiamo 9 scelte di m. In tutto i numeri che hanno la proprietà richiesta sono allora $55 \times 9 = 495$.
[Problema proposto da L. Tolomeo.]

17. La risposta è **(A)**.
Il Triangolo AED, se "raddoppiato" rispetto ad ED, diventa un triangolo equilatero, quindi la misura di AD è la metà di quella di AE, ovvero AE misura 2 m e quindi EB misura 1 m, come FC e AD. Risulta chiaro allora, per motivi di simmetria, che il triangolo DEF è equilatero. Applicando il teorema di Pitagora a ADE troviamo che ED misura $\sqrt{4-1}$ m $= \sqrt{3}$ m e quindi la sua altezza è $\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$ m $= \frac{3}{2}$. L'area di DEF è allora

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2\,.$$

[Problema proposto da S. Di Trani.]

18. La risposta è **(A)**.
Osserviamo che Enrico fa un'affermazione vera, perchè dice semplicemente che se il colpevole è una persona allora ogni altra persona è innocente; quindi Enrico è innocente. Se Cecilia fosse colpevole allora mentirebbe e quindi in particolare Anna sarebbe innocente e quindi direbbe la verità. Ma Anna afferma che il colpevole è un maschio, in contraddizione con il fatto che la colpevole è Cecilia, quindi il fatto che Cecilia sia colpevole porta ad una contraddizione. Deduciamo che Cecilia è innocente. Quindi l'affermazione di Cecilia è vera e, poichè Enrico non può essere il colpevole, Anna è necessariamente la colpevole.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

19. La risposta è **(E)**.
Supponiamo che x e y abbiano la proprietà richiesta. Allora

$$x^2 - 1 - xy + y = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) - y(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1-y) = 0\,.$$

Il fattore $(x-1)$ nono può essere nullo perchè x è strettamente maggiore di 1. D'altra parte il fattore $(x+1-y)$ è nullo per ogni scelta di x e y tale che $y = x+1$. Quindi, per ogni scelta del numero intero x strettamente maggiore di 1, scegliendo $y = x+1$ (che è ancora un numero intero strettamente maggiore di 1), la relazione richiesta è verificata. In conclusione, le coppie che soddisfano l'uguaglianza sono infinite.
[Problema proposto da L. Tolomeo]

20. La risposta è **(B)**.
Se i pezzi non si sovrappongono allora l'area della figura che essi formano deve essere uguale a quella della figura di partenza. Quindi il quadrato deve avere la stessa area del triangolo; questo ha altezza $20\frac{\sqrt{3}}{2}$ m $= 10\sqrt{3}\,$m. L'area del triangolo, e del quadrato, è allora

$$\frac{1}{2}200\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2\,.$$

Il lato del quadrato è la radice della sua area e quindi misura $10\sqrt[4]{3}$ m.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]