PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

23 novembre 2005

1 Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	D
2	C
3	B
4	E
5	D
6	D
7	B
8	A
9	B
10	C
11	B
12	B
13	C
14	B
15	B
16	D
17	C
18	D
19	C
20	E

2 Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(D)**. Osserviamo che $2^3 \cdot 5^4 \cdot 10^5 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 10^5 = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^8$. Dunque il numero che stiamo considerando è compreso tra 10^8 e 10^9, estremi esclusi; quindi ha 9 cifre.

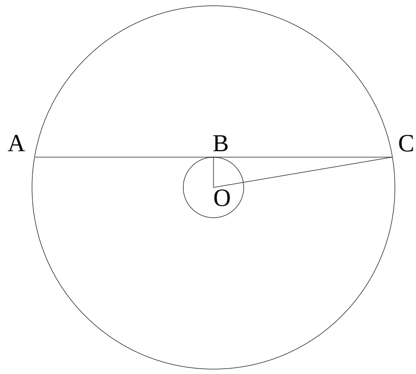
2. La risposta è **(C)**. $\sqrt{12^{12}} = 12^{\frac{12}{2}} = 12^6 = (2^2 \cdot 3)^6 = 2^{12} \cdot 3^6$.

3. La risposta è **(B)**. $a(b+c) - b(a+c) = c(a-b)$. Per rendere il più grande possibile questo numero scegliamo b più piccolo possibile, cioè $b = 1$. Per rendere massimo $c(a-1)$ dobbiamo scegliere a e c più grandi possibili, compatibilmente con il fatto che devono essere minori o uguali a 10 e distinti. Per $a = 10$ e $c = 9$ si ottiene 81 mentre per $a = 9$ e $c = 10$ si ottiene 80. Quindi 81 è il valore massimo che possiamo ottenere.

4. La risposta è **(E)**. Indichiamo con a il fattore per cui deve essere moltiplicata l'età di ciascun nipote per ottenere il numero di ciliege che gli spettano. Allora $a(4+7+9) = 20a = 120$ e quindi a deve essere 6. Il numero di ciliege che spettano a Jacopo è $6 \cdot 4 = 24$.

5. La risposta è **(D)**. La massima distanza possibile tra le due capanne, compatibilmente con il fatto che esista un percorso rettilineo interamente contenuto nell'atollo che le unisce, è la

lunghezza di una corda della circonferenza che delimita esternamente l'atollo, tangente alla circonferenza che lo delimita internamente. Una corda di questo tipo è il segmento AC nella figura riportata sotto. La lunghezza di AC è il doppio della lunghezza di BC; questa può essere trovata applicando il Teorema di Pitagora al triangolo BOC: $\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = 35$ km. Dunque $\overline{AC} = 2\sqrt{35}$ km.



6. La risposta è **(D)**. Le affermazioni della seconda persona e della terza persona sono in contraddizione tra loro e dunque una delle due deve essere falsa; quindi c'è almeno un'affermazione falsa. Osserviamo anche che i dati del problema non implicano che nessuna delle affermazioni fatte sia necessariamente vera, quindi le risposte **(A)**, **(B)** e **(C)** non sono corrette.

7. La risposta è **(B)**. Ogni squadra gioca 38 partite, quindi $v + n + p = 38$. Se $v = n + p$ allora $v = 19$ e anche $n + p = 19$. Le terne per cui $v = n + p$ sono allora:

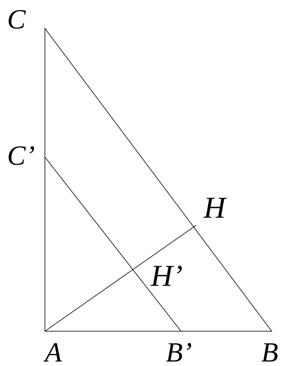
$$(19, 19, 0), (19, 18, 1), (19, 17, 2), \ldots, (19, 1, 18), (19, 0, 19)\,.$$

In tutto sono 20 terne ordinate distinte.

8. La risposta è **(A)**. Per il Teorema di Pitagora, l'ipotenusa BC misura 5 m. Sia AH l'altezza di ABC relativa all'ipontenusa BC. Uguagliando le formule per calcolare l'area di ABC:

$$\text{area}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6\,\text{m}^2\,,$$

possiamo calcolare AH che misura allora $(6 \cdot 2)/5$ m $= 12/5$ m. Il triangolo $AB'C'$ è simile al triangolo ABC; inoltre, poichè le due rette che contengono BC e $B'C'$ sono parallele e hanno distanza 1, l'altezza AH' di $AB'C'$ relativa all'ipotenusa $B'C'$ è $\left(\frac{12}{5} - 1\right)$ m $= \frac{7}{5}$ m.



Quindi $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AH'}} = \dfrac{12/5}{7/5} = \dfrac{12}{7}$. Il rapporto tra le ipotenuse dei due triangoli ha lo stesso valore, quindi $\overline{B'C'} = \dfrac{7}{12}\overline{BC} = \dfrac{35}{12}$ m. L'area di $AB'C'$ è data da

$$\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{AH'}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{35}{12}\right)\left(\frac{7}{5}\right) \text{ m}^2 = \frac{49}{24}\text{m}^2 \,.$$

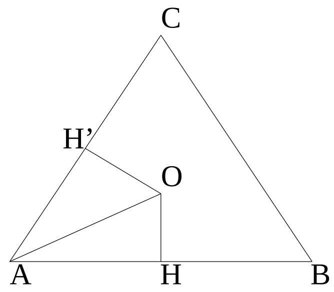
9. La risposta è **(B)**. Sia n un qualsiasi numero naturale e sia $N = (n+2)(n+3)(2n+5)$. N è divisibile per due numeri consecutivi: $n+2$ e $n+3$, quindi è certamente divisibile per un numero pari e quindi è divisibile per 2. Proviamo ora che N è anche divisibile per 3 e quindi è divisibile per 6. Se n è divisibile per 3, lo è anche $n+3$ e quindi lo è N. Se n diviso 3 dà resto 1, allora $n+2$ è divisibile per 3 e quindi N è divisibile per 3. Se infine n diviso 3 dà resto 2 allora n si può scrivere nella forma $n = 3k+2$ per un certo numero naturale k. Quindi $2n+5 = 6k+4+5 = 3(2k+3)$ è divisibile per 3 e quindi lo è anche N. Osserviamo anche che le risposte **(A)**, **(C)**, **(D)** ed **(E)** non sono corrette: infatti se $n = 1$, $N = 84$ che non è divisibile né per 9, né per 10 né per 15; se $n = 3$, $N = 330$ che non è divisibile per 4.

10. La risposta è **(C)**. Prima soluzione. L'uguaglianza $a+b = ab$ equivale a $(a-1)(b-1) = 1$ quindi i fattori $a-1$ e $b-1$ devono coincidere entrambi con 1 oppure coincidere entrambi con -1. Il primo caso porta alla coppia $(a = 2, b = 2)$; il secondo porta alla coppia $(a = 0, b = 0)$. Le coppie che verificano la proprietà richiesta sono in tutto due.
Seconda soluzione. Deve essere $ab = a+b$; osserviamo che la coppia $(0,0)$ verifica questa uguaglianza. Inoltre se $a = 0$ allora $0 = 0+b$ e dunque anche $b = 0$; allo stesso modo si vede che se $b = 0$ allora $a = 0$. Quindi se vogliamo cercare altre soluzioni oltre $(0,0)$ possiamo supporre che a e b siano entrambi diversi da zero. Allora $b = 1 + \dfrac{b}{a}$ quindi a divide b; allo stesso modo $a = \dfrac{a}{b} + 1$ e quindi b divide a. L'unica possibilità è allora che $a = \pm b$. Se $a = b$ allora $a^2 = 2a$ cioè $a = 2$ e otteniamo così una seconda soluzione data da $(2,2)$. Se $a = -b$ allora $-a^2 = 0$ cioè $a = 0$, ma questo ci riporta alla soluzione $(0,0)$ già trovata. In conclusione le coppie che verificano la proprietà richiesta sono due: $(0,0)$ e $(2,2)$.

11. La risposta è **(B)**. Indichiamo con X, Y, Z la prima, la seconda e la terza cifra del lucchetto. Per risolvere il problema si devono contare tutte le possibili terne ordinate (X, Y, Z) tali che $X+Y+Z = 10$. Se $X = 0$ deve essere $Y+Z = 10$; in questo caso né Y né Z possono essere 0, Y può assumere tutti i valori compresi tra 1 e 9, estremi inclusi, e per ciascuna scelta di Y il valore di Z è determinato: $Z = 10 - X$; ci sono quindi 9 terne con $X = 0$. Se $X = 1$, allora $Y+Z = 9$, Y può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 9, estremi inclusi, e Z è conseguentemente determinata; ci sono allora 10 terne con $X = 1$. Si può procedere in questo modo trovando che ci sono 9 terne con $X = 2$, 8 con $X = 3$, e così via fino a 2 terne con $X = 9$. Il numero complessivo delle terne è allora $9+10+9+8+7+6+5+4+3+2 = 63$.

12. La risposta è **(B)**. Facendo riferimento alla figura, consideriamo i due lati consecutivi CA e AB. I segmenti HO e $H'O$ appartengono agli assi di AB e CA rispettivamente, O è il punto di incontro di questi assi con la bisettrice di $\widehat{CAB}$. I triangoli AHO e $AH'O$ hanno entrambi un angolo retto e hanno un angolo uguale: $\widehat{H'AO} = \widehat{HAO}$, quindi hanno tutti gli angoli uguali; inoltre hanno il lato AO in comune e dunque si tratta di triangoli congruenti. Conseguentemente, AH e AH' hanno la stessa lunghezza; quindi anche AB e CA hanno la stessa lunghezza, poichè H e H' sono i punti medi di AB e CA rispettivamente (gli assi incontrano i lati nei punti medi). Questo ragionamento può essere ripetuto per i lati AB e BC

che quindi sono uguali. In conclusione i lati del triangolo ABC sono tutti uguali tra loro e quindi il triangolo è equilatero.



13. La risposta è **(C)**. Se N è un numero con la proprietà richiesta, N deve essere un quadrato perfetto compreso tra 1 e 100, estremi inclusi, quindi le possibilità per N sono:

$$N = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\,.$$

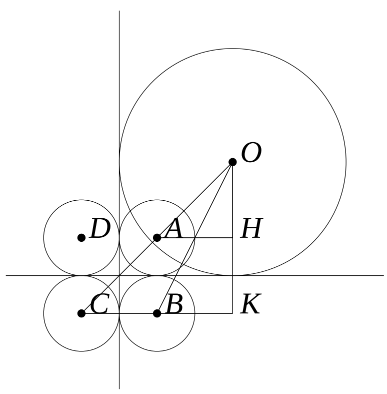
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&N = 1\,, \quad \text{divisori} : \{1\}\,, \text{ numero di divisori: } 1\,,\ 1 = 1^2\\
&N = 4\,, \quad \text{divisori} : \{1, 2, 4\}\,, \text{ numero di divisori: } 3\,,\ 4 \neq 3^2\\
&N = 9\,, \quad \text{divisori} : \{1, 3, 9\}\,, \text{ numero di divisori: } 3\,,\ 9 = 3^2\\
&N = 16\,, \quad \text{divisori} : \{1, 2, 4, 8, 16\}\,, \text{ numero di divisori: } 5\,,\ 16 \neq 5^2\\
&N = 25\,, \quad \text{divisori} : \{1, 5, 25\}\,, \text{ numero di divisori: } 3\,,\ 25 \neq 3^2\\
&N = 36\,, \quad \text{divisori} : \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}\,, \text{ numero di divisori: } 9\,,\ 36 \neq 9^2\\
&N = 49\,, \quad \text{divisori} : \{1, 7, 49\}\,, \text{ numero di divisori: } 3\,,\ 49 \neq 3^2\\
&N = 64\,, \quad \text{divisori} : \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}\,, \text{ numero di divisori: } 7\,,\ 64 \neq 7^2\\
&N = 81\,, \quad \text{divisori} : \{1, 3, 9, 27, 81\}\,, \text{ numero di divisori: } 4\,,\ 81 \neq 4^2\\
&N = 100\,, \quad \text{divisori} : \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}\,, \text{ numero di divisori: } 9\,,\ 100 \neq 9^2\,.
\end{aligned}$$

Solo i due valori $N = 1$ e $N = 9$ hanno la proprietà richiesta.

14. La risposta è **(B)**. Se n è un numero intero compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, n si può scrivere nella forma: $n = 10a + b$, dove a è la cifra delle decine di n e può variare da 1 a 9 e b è la cifra delle unità e può variare da 0 a 9. n ha la proprietà richiesta dall'esercizio se $10a + b = ab + (a + b)$ cioè se $9a - ab = a(9 - b) = 0$. Poichè $a \neq 0$ questo vuol dire $b - 9 = 0$, cioè $b = 9$. I numeri che hanno la proprietà richiesta sono allora quelli che hanno 9 come cifra delle decine e sono compresi tra 10 e 99, cioè: $19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99$; sono in tutto 9.

15. La risposta è **(B)**. Tracciamo le due rette tangenti ai due cerchi e il cerchio di raggio 3 m posizionato come in figura, con centro in O.



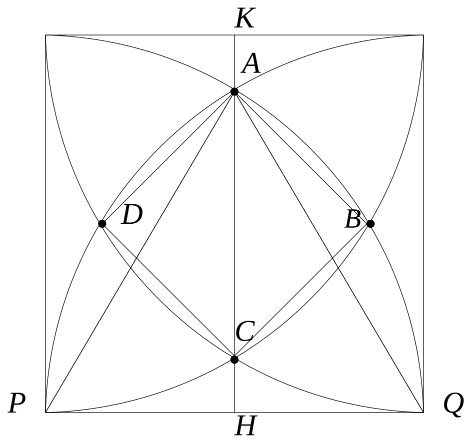
Le possibili posizioni del centro del cerchio di raggio 1 m sono i punti A, B, C, D. Tra i segmenti OA, OB, OC e OD, il segmento AO ha lungheza minima; infatti chiaramente OC ha lunghezza maggiore di OA; ma anche OB (e OD che è lungo come OB) ha lunghezza maggiore di OA in quanto OA e OB sono le ipotenuse dei due triangoli rettangoli AHO e BKO che hanno i due cateti AH e BK di lunghezza uguale mentre il cateto OH ha lunghezza minore del cateto OK. Quindi la minima distanza tra i centri dei due cerchi è pari alla lunghezza di OA; questa può essere calcolata applicando il Teorema di Pitagora al triangolo AHO: $\overline{AO} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HO}^2} = \sqrt{4+4}$ m$= 2\sqrt{2}$ m.

16. La risposta è **(D)**. Tra 1 e 2005 (estremi inclusi) ci sono:

$$\{1, \ldots, 9\} : \text{ 9 numeri con una cifra} \rightarrow 9 \times 1 = 9 \text{ cifre,}$$
$$\{10, \ldots, 99\} : \text{ 90 numeri con due cifre} \rightarrow 90 \times 2 = 180 \text{ cifre,}$$
$$\{100, \ldots, 999\} : \text{ 900 numeri con tre cifre} \rightarrow 900 \times 2 = 2700 \text{ cifre,}$$
$$\{1000, \ldots, 2005\} : \text{ 1006 numeri con quattro cifre} \rightarrow 1006 \times 4 = 4024 \text{ cifre.}$$

Il numero totale di cifre è allora: $9 + 180 + 2700 + 4024 = 6913$.

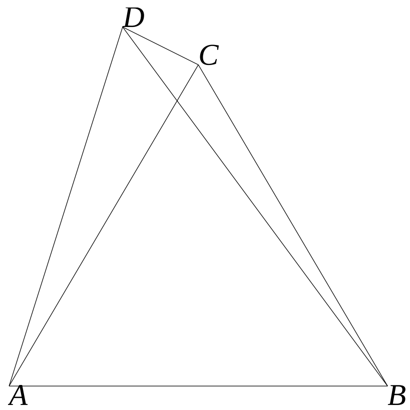
17. La risposta è **(C)**. Con riferimento alla figura, osserviamo che il triangolo APQ è equilatero e ha lato di lunghezza 10 m. Possiamo allora calcolare la sua altezza AH: $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}10$ m$= 5\sqrt{3}$ m, e $\overline{AK} = \overline{CH} = \overline{KH} - \overline{AH} = (10 - 5\sqrt{3})$ m. Allora abbiamo anche: $\overline{AC} = \overline{AH} - \overline{CH} = (5\sqrt{3} - (10 - 5\sqrt{3}))$ m $= 10(\sqrt{3} - 1)$ m. Il quadrilatero $ABCD$ è un quadrato, ha infatti tutti i lati di uguale lunghezza e le diagonali di uguale lunghezza, per le proprietà di simmetria della figura. La lunghezza del suo lato AB è pari alla lunghezza della sua diagonale AC divisa per $\sqrt{2}$, cioè: $\overline{AB} = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$ m $= 5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ m.



18. La risposta è **(D)**. Indichiamo con I il numero di impiegati che parlano inglese, con T il numero di impiegati che parlano tedesco e con B il numero di impiegati che parlano entrambe le lingue. I dati del problema ci dicono che il 20% di I, cioè $\frac{1}{5}I$, è uguale a B e anche l'80% di T, cioè $\frac{4}{5}T$, è uguale a B; quindi $\frac{1}{5}I = \frac{4}{5}T$ cioè $I = 4T$. Il numero totale di impiegati, che è 84, è la somma del numero di impiegati che parlano inglese e del numero di impiegati che parlano tedesco meno il numero di impiegati che parlano entrambe le lingue (che altrimenti verrebbero

contati due volte): $84 = I + T - B = I + T - \frac{4}{5}T = I + \frac{1}{5}T = 4T + \frac{1}{5}T = \frac{21}{5}T$. Quindi $T = 84\frac{5}{21} = 20$ e $B = \frac{4}{5}T = 16$.

19. La risposta è **(C)**. Facendo riferimento alla figura, il triangolo ABC è equilatero, poichè gli angoli in A e in B sono di 60°. Inoltre $\widehat{ADB} = 180° - (\widehat{DAB} + \widehat{DBA}) = 180° - 80° - 50° = 50° = \widehat{DBA}$. Dunque il triangolo ABD è isoscele e quindi $\overline{DA} = \overline{AB} = \overline{AC}$ cioè anche il triangolo ACD è isoscele. Allora $\alpha = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{CAD}) = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$.



20. La risposta è **(E)**. Prima soluzione. $\mathbf{2^{3^3}} = 2^{27} > 2^{18} = 4^9 > 3^9 = \mathbf{3^{3^2}} > 3^8 = \mathbf{3^{2^3}} = (3^2)^4 = 9^4 > 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} > 2^9 = \mathbf{2^{3^2}} = 4^4 > 3^4 = \mathbf{3^{2^2}}$.
Seconda soluzione. I numeri presenti nelle varie catene di disuguaglianze sono (riportiamo solo i risultati di calcoli che possono essere fatti senza la calcolatrice in tempi ragionevoli):

$$\begin{aligned}
&3^{2^2} = 3^4 = 81\,,\\
&2^{3^2} = 2^9 = 512\,,\\
&3^{2^3} = 3^8 = (81)^2 = 7371\,,\\
&3^{3^2} = 3^9 = 3^8 \cdot 3 = 7371 \cdot 3 = 22113\,,\\
&2^{3^3} = 2^{27} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^7 = (1024)^2 \cdot 2^7 > (10^3)^2 = 10^6 > 22113\,.
\end{aligned}$$

Dunque la catena di disuguagliaze giusta è la **(E)**: $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$.
Osserviamo infine che la **(A)**, la **(B)** e la **(D)** non sono corrette perchè il numero 2^{3^3} non compare come ultimo termine a destra. La **(C)** non è corretta perchè contiene la disuguaglianza $3^{2^3} = 7371 < 2^{3^2} = 512$ che è falsa.