I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

17 novembre 2004

E	B	E	C	C	E	D	C	C	D	D	C	B	B	A	B	A	B	C	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(E)**. I chili di pasta mangiati ogni anno sono $30 \times 57000000 = 1710 \times 10^6 = 1,71 \times 10^9$ e dunque le tonnellate sono $1,71 \times 10^6$ ovvero più di un milione.

2) La risposta è **(B)**. Indichiamo con L, S e C le età di Luigi, Silvio e Carlo rispettivamente. Sappiamo che $L + S + C = 34$, $L = S + 4$ e $S = C + 3$. Dalla seconda e dalla terza equazione abbiamo $L = C + 7$ e sostituendo i valori di L e di S rispetto a C nella prima equazione abbiamo $3C + 10 = 34$ da cui $C = 8$ e, a ritroso, $S = 11$ e $L = 15$ ovvero l'età massima.

3) La risposta è **(E)**. L'altezza a cui Tarzan deve legare la catena è la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo di cui l'altro cateto è il raggio della radura e l'ipotenusa è la catena. Dal Teorema di Pitagora segue allora che l'altezza misura in metri $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$.

4) La risposta è **(C)**. Dalla prima uguaglianza otteniamo $b = a + 3$ dunque b è maggiore di a; uguagliando il primo e il terzo termine otteniamo $a = c + 2$ quindi a è maggiore di c; questo fatto insieme al precedente ci dice che b è maggiore di c. Dalla terza uguaglianza segue $d = c + 7$ e dunque anche d è maggiore di c. In conclusione, c è minore sia di a, che di b che di d, quindi c è il minimo.

5) La risposta è **(C)**. Il numero di medaglie complessivamente assegnate è 480 (il 40 % di 1200). Indichiamo con X, Y e Z il numero delle medaglie d'oro, d'argento e di bronzo rispettivamente. I dati del problema ci dicono che $Y = 2X$ e $Z = 3X$; dunque $480 = X+Y+Z = X+2X+3X = 6X$ e quindi $X = 80$ e Y (ovvvero il numero richiesto) è pari a 160.

6) La risposta è **(E)**. La situazione: primo=bugiardo, secondo=non bugiardo, terzo=non bugiardo, è compatibile con le affermazioni dei tre. Ma lo stesso si può dire della situazione seguente (distinta dalla precedente): primo=non bugiardo, secondo=bugiardo, terzo=bugiardo. Dunque il numero dei bugiardi non è univocamente determinato dal problema.

7) La risposta è **(D)**. Tutti e tre i numeri sono divisibili per 3, dunque anche la loro somma $(a+b+c)$ è divisibile per 3 e quindi questa somma al quadrato, cioè $(a+b+c)^2$, è divisibile per 9. Osserviamo che le affermazioni contenute nelle risposte diverse da **(D)** sono false per $a = 15$, $b = 12$ e $c = 42$.

8) La risposta è **(C)**. La sequenza degli 11 numeri (incluso l'1 iniziale) che vengono scritti alla lavagna può essere calcolata semplicemente in maniera diretta: $1 = 2^1 - 1$, $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $15 = 2^4 - 1$, $31 = 2^5 - 1$, $63 = 2^6 - 1$, $127 = 2^7 - 1$, $255 = 2^8 - 1$, $511 = 2^9 - 1$, $1023 = 2^{10} - 1$, $2047 = 2^{11} - 1$. Quest'ultimo numero fornisce la risposta.

9) La risposta è **(C)**. Se S indica la spesa, in Euro, sostenuta da Marco nel 2002, quella del 2003 è: $2S - 2S\frac{30}{100} = \frac{7}{5}S$. Analogamente, la spesa sostenuta nel 2004 è pari ai sette quinti di quella del 2003, cioè $\left(\frac{7}{5}\right)^2 S = \frac{49}{25}S$. Poichè $\frac{49}{25}$ è maggiore di 1 e minore di 2, la spesa del 2004 è maggiore di quella del 2002 ma minore del doppio di essa.

10) La risposta è **(D)**. Sia H il punto medio delle corde AB e CD. Per ipotesi sappiamo che $HB = 2HD$. Applichiamo il Teorema di Pitagora ai triangoli HOD e HOB: ricaviamo le due uguaglianze $OH^2 = 16 - HD^2$ e $OH^2 = 25 - HB^2$. Dunque $9 = HB^2 - HD^2 = 4HD^2 - HD^2$ e quindi $HD = \sqrt{3}$ e $AB = 4HD = 4\sqrt{3}$.

11) La risposta è **(D)**. Consideriamo le coppie ordinate di numeri naturali la cui somma è, ad esempio, 6; queste sono: $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$ e $(5, 1)$, cioè sono $5 = 6 - 1$ coppie. Allo stesso modo si trova che le coppie ordinate di numeri naturali la cui somma è 7, sono in tutto 6. In generale le coppie ordinate di numeri naturali la cui somma è un numero assegnato n, sono $n - 1$. Dunque le coppie di numeri naturali la cui somma è strettamente maggiore di 5 e minore o uguale a 10 sono in tutto: 5+6+7+8+9=35.

12) La risposta è **(C)**. Indichiamo con n il numero dei compiti già fatti e con v la somma dei voti ottenuti in questi compiti. Supponiamo che Michele prenda 10 all'ultimo compito, la media finale sarà $\frac{v+10}{n+1}$ e questa media deve essere pari a 9. Allo stesso modo, se il voto dell'ultimo compito sarà 5, la media finale, cioè $\frac{v+5}{n+1}$ sarà pari a 8. Abbiamo allora due equazioni $\frac{v+10}{n+1} = 9$ e $\frac{v+5}{n+1} = 8$ che possono essere scritte così: $v = 9n - 1$ e $v = 8n + 3$. Da queste si ricava facilmente il valore $n = 4$.

13) La risposta è **(B)**. Chiamiamo E, F, G i punti di contatto della circonferenza con i lati AB, BC e CD rispettivamente. Due segmenti aventi il primo estremo in uno stesso punto esterno a una circonferenza e tangenti ad essa nel secondo estremo, hanno la stessa lunghezza; quindi $BE = BF$ e $CF = CG$. Sappiamo inoltre che $DG = 1$ m, $AE = 1$ m e $AD = 2$ m. L'area del trapezio in metri quadri è data da $AD(AB + CD)/2 = 2(AE + EB + CG + GD)/2 = 1 + (EB + CG) + 1 = 2 + (BF + FC) = 2 + BC = 9$.

14) La risposta è **(B)**. Il primo cuscino (dal basso) ha sopra di sé un peso di $\frac{19}{2}$ kg e dunque il suo spessore diminuisce di 19 cm, diventando 11 cm; allo stesso modo il secondo diminuisce di 18 cm e il suo spessore diventa 12 cm, il terzo diminuisce di 17 cm il suo spessore diventa 13 cm e così via fino all'ultimo cuscino il cui spessore rimane di 30 cm. Lo spessore della pila di cuscini è allora pari a $(11 + 12 + 13 + \cdots + 28 + 29 + 30) = 410$ cm.

15) La risposta è **(A)**. Calcoliamo le dimensioni (altezza e dimensioni della base) interne della cassetta. L'altezza interna è pari a quella esterna meno 2 cm (perchè la cassetta non ha coperchio), ovvero 45 cm. Le dimensioni interne della base sono invece uguali a quelle esterne diminuite di 4 centimetri ciascuna, ovvero sono 34 cm e 40 cm. Il volume interno è allora $(34 \times 40 \times 45)\text{cm}^3$ cioè 61200 cm^3.

16) La risposta è **(B)**. Tolti i fratelli Ambrosio e i fratelli Bianchi, restano altri quattro giocatori; chiamiamoli per comodità a, b, c e d. Per risolvere il problema è sufficiente calcolare tutti i possibili modi in cui due di questi giocatori completino la squadra A dei fratelli Ambrosio, cioè tutti i modi in cui si possono scegliere due elementi distinti dell'insieme di quattro elementi $\{a, b, c, d\}$. Le possibili scelte sono 6: (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) e (c, d).

17) La risposta è **(A)**. Indichiamo con C una delle uscite dell'autostrada e con D il punto in cui il raccordo che parte da C arriva sulla statale; quindi ACD è un triangolo rettangolo; chiamiamo x la misura in chilometri del cateto AC, questa sarà 10, 20, 30 o 40, a seconda dell'uscita che abbiamo scelto. Calcoliamo il tempo che l'automobilista impiegherebbe per arrivare da A a D percorrendo: 1) la statale, 2) l'autostrada fino a C e il raccordo da C a D. Ricordando che l'angolo in A è di 30 gradi, la lunghezza di AD è $\frac{2x}{\sqrt{3}}$ km e dunque il tempo del percorso 1) è $\frac{x}{45\sqrt{3}}$ ore (lunghezza diviso velocità); chiamiamo T_1 questo tempo. Il tempo del percorso 2) è la somma del tempo necessario a percorrere un tratto di autostrada lungo x, cioè $\frac{x}{130}$ ore, e del tempo necessario a percorrere il raccordo CD a 90 km/h. Il segmento CD è lungo $\frac{x}{\sqrt{3}}$ km e quindi il tempo per percorrerlo a 90 km/h è di $\frac{x}{90\sqrt{3}}$ ore. Il tempo che l'automobilista impiega per il percorso 2) è allora di $\frac{x}{130} + \frac{x}{90\sqrt{3}} = x\left(\frac{1}{130} + \frac{1}{90\sqrt{3}}\right)$; chiamiamo T_2 questo secondo tempo. La differenza $T_2 - T_1$ è data da $\frac{x}{10}\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{9\sqrt{3}}\right) = \frac{x}{10}\left(\frac{1}{13} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$. Poichè $13^2 = 169$ è minore di $(9\sqrt{3})^2 = 81 \times 3 = 243$, $\frac{1}{13}$ è minore di $\frac{1}{9\sqrt{3}}$ e quindi $T_2 - T_1$ è maggiore di zero, cioè il tempo T_2 è maggiore di T_1. Questo vuol dire che, indipendentemente dall'uscita scelta, percorrere solo la statale richiede un tempo minore rispetto al percorso autostrada-raccordo.

18) La risposta è **(B)**. L'angolo $\widehat{ABC}$ misura $180^o - 72^o = 108^o$. Consideriamo il quadrilatero $OCBA$: la somma dei suoi angoli interni è 360^o, quindi: $\widehat{AOC} + \widehat{OCB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAO} = 360^o$. D'altra parte, poichè i triangoli OBC e OBA sono isosceli, $\widehat{OCB} = \widehat{CBO}$ e $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$, quindi $\widehat{OCB} + \widehat{BAO} = \widehat{CBO} + \widehat{ABO} = \widehat{ABC} = 108^o$. Conseguentemente $\widehat{AOC} = 360^o - 108^o - 108^o = 144^o$.

19) La risposta è **(C)**. La prima cifra può essere uno qualunque tra i numeri 1, 2, 3, 4 e 5; dunque ci sono 5 scelte per la prima cifra. Per la seconda e la terza ci sono sei scelte: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Per la quarta cifra ci sono solo due scelte: 0 e 5; infatti affinchè il numero sia divisibile per 5 la sua ultima cifra deve essere 0 oppure 5. Il numero complessivo di scelte di quattro numeri tra 1, 2, 3, 4 e 5 per comporre un numero di quattro cifre divisibile per 5 è dato dal prodotto delle scelte possibili per ciascuna delle cifre, cioè: $5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$.

20) La risposta è **(D)**. Chiamiamo $\mathcal{C}$ la circonferenza di raggio 3 e O il suo centro. Sia P un punto con la proprietà richiesta. Se P è all'esterno di $\mathcal{C}$ e la sua distanza da O è maggiore di 5, la circonferenza centrata in P di raggio 2 è tutta all'esterno di $\mathcal{C}$ e non interseca quest'ultima (osserviamo che 5 è la somma dei raggi di $\mathcal{C}$ e della circonferenza centrata in P); invece, se P è all'esterno di $\mathcal{C}$ ma ha distanza da O minore o uguale a 5, la circonferenza centrata in P di raggio 2 interseca $\mathcal{C}$ (in uno o due punti). Quindi i punti esterni a $\mathcal{C}$ che hanno la proprietà richiesta sono quelli che hanno distanza da O minore o uguale a 5. Sia P un punto interno a $\mathcal{C}$; se P ha distanza da O minore di 1, la circonferenza centrata in P di raggio 2 è tutta contenuta in $\mathcal{C}$ e non interseca quest'ultima (osserviamo che 1 è la differenza tra il raggio di $\mathcal{C}$ e quello della circonferenza centrata in P di raggio 2); se invece la distanza da P a O è maggiore o uguale a 1, la circonferenza centrata in P di raggio 2 interseca $\mathcal{C}$ (in uno o due punti). Quindi i punti interni a $\mathcal{C}$ che hanno la proprietà richiesta sono quelli che stanno fuori dal cerchio centrato in O di raggio 1. Mettendo insieme i punti esterni e interni a $\mathcal{C}$ che hanno la proprietà richiesta, otteniamo una corona circolare con centro O, raggio interno 1 e raggio esterno 5.