PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

5 dicembre 2001

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ______________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Dei numeri interi hanno media 6 e somma 18. Quanti sono gli interi?
(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 12 **(D)** 108 **(E)** non si può determinare.

2) Se a e b sono due interi con $1 \leq b \leq 3$ allora il numero delle frazioni (ridotte ai minimi termini) della forma $\frac{a}{b}$ tali che $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$ è
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** infinito.

3) In una scuola il 40% degli allievi ha difetti alla vista, tra questi il 70% usano solo gli occhiali e il 30% solo le lenti a contatto. Sapendo che in tutto vi sono 42 paia occhiali, quale fra queste affermazioni è vera?
(A) 90 allievi hanno difetti alla vista
(B) 60 allievi vedono bene
(C) la scuola ha 200 allievi
(D) 20 allievi hanno le lenti a contatto
(E) nessuna delle precedenti.

4) Una famiglia composta dai due genitori e da due giovani figli vuole attraversare un fiume. La loro barchetta può portare al più due giovani o un solo adulto. Contando sia gli attraversamenti in un senso che quelli nell'altro, qual è il numero minimo di attraversamenti che la barchetta deve fare? (ovviamente la barca non può attraversare il fiume senza essere condotta).
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9.

5) Si consideri il quadrato $ABCD$ di lato 24. Esterni al quadrato si costruiscano i triangoli isosceli AEB, CGD di lato 13 e basi AB e CD, e i triangoli isosceli BFC, DHA di lato 15 e basi BC, DA. Quanto vale l'area del quadrilatero $EFGH$?
(A) 357 **(B)** 714 **(C)** 912 **(D)** 952 **(E)** 1428.

6) Per quali valori reali di α esiste una ed un'unica coppia di numeri reali (x, y) che è soluzione del sistema a fianco?
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha \\ x = 3y \end{cases}$$
(A) $\alpha = 0$ **(B)** $\alpha = 3$ **(C)** $\alpha > 0$ **(D)** $\alpha = \sqrt{3}$ **(E)** $\alpha \neq 0$.

7) Diciannove studenti devono ricevere borse di studio per un totale di 20 000 Euro. L'ammontare di ciascuna borsa è espressa da un numero intero di Euro. Tutti i ragazzi riceveranno lo stesso ammontare e così le ragazze. Ma ogni ragazza riceverà 600 Euro più dei ragazzi. Quanto ricevono a testa i ragazzi?
(A) 600 **(B)** 800 **(C)** 1400 **(D)** 1600
(E) solo le ragazze ricevono una borsa.

8) Un dado perfettamente equilibrato viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che né il punteggio del primo lancio, né la somma dei punteggi del primo e del secondo lancio, né la somma dei punteggi dei primi tre lanci sia divisibile per 7?
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{25}{36}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{5}{6}$.

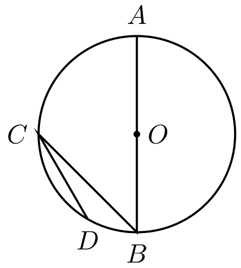
9) Nel Far West due fiumi rettilinei scorrono parallelamente alla distanza di 10 km. Lo stregone di un villaggio indiano, che si trova nella sua capanna, deve raccogliere un'ampolla d'acqua da ciascuno dei due fiumi e portare le ampolle al villaggio per la cerimonia della preghiera a Manitù. Qual è la minima distanza del percorso che deve compiere, sapendo che la capanna e il villaggio sono equidistanti dai due fiumi e distano fra loro 48 km?
(A) 48 **(B)** 52 **(C)** 53 **(D)** 58 **(E)** $\sqrt{48^2 + 10^2}$.

10) Per il furto in casa de Ricchis i sospetti si sono ristretti a 4 persone: Aldo, bruno e senza occhiali, Baldo, bruno e con gli occhiali, Carlo, biondo e con gli occhiali, e Dario, biondo e senza occhiali. La polizia ha accertato che il furto è stato commesso da una sola persona, che si è avvalsa di un unico complice. I sospetti si sono ristretti a 4 persone; le loro deposizioni sono le seguenti.
Aldo: *"Il colpevole è bruno e porta gli occhiali"*.
Baldo: *"Il colpevole è biondo e non porta gli occhiali"*.
Carlo: *"Il colpevole porta gli occhiali e il suo complice è Aldo"*.
Dario: *"Il colpevole è bruno e il suo complice è Carlo"*.
Si sa che le due affermazioni del colpevole sono false, mentre una sola affermazione del complice è falsa. Gli altri hanno detto la verità. Chi sono il colpevole e il suo complice?
(A) Aldo e Carlo **(B)** Baldo e Carlo **(C)** Baldo e Dario
(D) Aldo e Dario **(E)** non è possibile dedurlo.

11) Sia $P(x)$ un polinomio i cui coefficienti sono o 0 o 1. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.
(A) $P(2)$ non può valere 51 **(B)** $P(3)$ non può valere 37
(C) $P(3)$ non può valere 92 **(D)** $P(4)$ non può valere 20
(E) $P(5)$ non può valere 150.

12) Quanti numeri interi positivi sono uguali al triplo della somma delle loro cifre?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** infiniti.

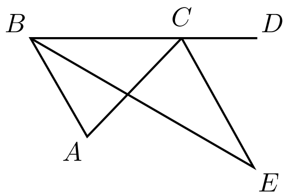
13) Nella figura a fianco, calcolare CD sapendo che $OB = 1$, $A\widehat{B}C = 45°$, $B\widehat{C}D = 15°$.



14) Ieri Pierino si è dilettato a fare la somma dei numeri dispari da 1 fino ad un certo valore. Quali delle seguenti somme è sicuramente errata?
(A) 625 **(B)** 1225 **(C)** 2025 **(D)** 3025 **(E)** 4525.

15) Un numero positivo x soddisfa la disuguaglianza $\sqrt{x} < 3x$ se e solo se:
(A) $x > \frac{1}{9}$ **(B)** $x > 3$ **(C)** $x > 9$ **(D)** $x < \frac{1}{9}$ **(E)** $x < 9$.

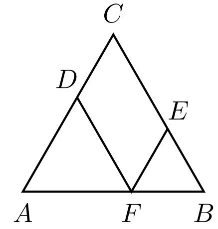
16) Nella figura a fianco, $A\widehat{B}E = E\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}E = E\widehat{C}D$. Sapendo che $C\widehat{E}B = y$, allora l'angolo $B\widehat{A}C$ è uguale a
(A) $90° - y$ **(B)** $90° - \frac{y}{2}$ **(C)** $2y$
(D) $180° - 2y$ **(E)** y.



17) L'impiegato del censimento nell'isola dei Cavalieri e Furfanti deve determinare il tipo (Cavalieri o Furfanti) e il titolo di studio degli abitanti (i Furfanti mentono sempre, mentre i Cavalieri dicono sempre la verità). In un appartamento abitato da due coniugi ottiene solo queste risposte:
Marito: *siamo entrambi laureati.*
Moglie: *siamo entrambi dello stesso tipo.*
Quante caselle può riempire con sicurezza l'impiegato?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

18) In un'isola di cavalieri e di furfanti, questi ultimi sono in numero doppio rispetto ai cavalieri. A ciascun abitante dell'isola viene chiesto quanti sono i cavalieri. Mentre ogni cavaliere fornisce la risposta esatta, il primo furfante fornisce il numero esatto aumentato di 1, il secondo furfante il numero esatto aumentato di 2, e così progressivamente. Sapendo che la somma di tutte le risposte è 1140, quanti sono gli abitanti dell'isola?
(A) 30 **(B)** 45 **(C)** 60 **(D)** 90 **(E)** 99.

19) Sapendo che il perimetro del parallelogramma $FECD$ è 4, l'area del triangolo equilatero ABC risulta uguale a:
(A) 8
(B) $\sqrt{3}$
(C) 4
(D) 6
(E) $2\sqrt{3}$.



20) Si considerino tutti i numeri di 8 cifre formati utilizzando una e una sola volta ognuna delle cifre 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Supponendo di farne il prodotto, qual è la cifra delle unità di quest'ultimo?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

21) Un numero viene prima raddoppiato e poi diminuito di un'unità. Applicando questo procedimento 2000 volte di seguito si perviene al risultato $2^{2001} + 1$. Qual è il numero di partenza?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

22) Tre amici si stanno dividendo in parti uguali un cesto di mele e si accorgono di poterlo fare senza tagliare le mele. Arriva un quarto amico e decidono di rifare la divisione, sempre in parti uguali e riescono nuovamente a farla senza tagliare le mele. Uno dei 4 va a casa e lungo la strada mangia 2 mele. Arrivato a casa si accorge di poter dividere le mele rimaste a metà con la propria ragazza senza tagliarle. Quante potevano essere al minimo le mele originarie?
(A) 12 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 36 **(E)** 50.

23) I numeri $p = 7 - \sqrt{47}$, $q = 5 - \sqrt{23}$ e $r = 2 - \sqrt{2}$, verificano:
(A) $r < q < p$ **(B)** $r < p < q$ **(C)** $p < q < r$ **(D)** $q < p < r$ **(E)** $q < r < p$.

24) Tre ciclisti partono da Cesenatico lungo la strada per Cortona. Il primo parte un'ora prima degli altri due, che partono assieme. Ciascuno dei ciclisti tiene una velocità costante. Dopo un certo tempo il terzo ciclista raggiunge il primo e due ore più tardi anche il secondo lo raggiunge. Il rapporto fra le velocità del secondo e del terzo ciclista è $\frac{2}{3}$. Quanto vale il rapporto fra la velocità del primo e quella del terzo?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$.

25) Per ogni numero reale x, sia $m(x)$ il minimo tra i numeri $2x$, $x + 1$, $10 - 2x$. Il massimo valore di $m(x)$ è:
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.