I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

1 dicembre 1999

C	E	C	A	C	B	D	C	D	C	C	B	D	D	E	A	B	E	C	D	B	C	E	B	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(C)**.
Infatti $391 = 17 \times 23$, quindi i lati sono lunghi 64 m e 88 m, e il perimetro è $(64+88+64+88)$ m $=$ 304 m.

2) La risposta è **(E)**.
Il numero che indica le ore è un quadrato perfetto se è 0, 1, 4, 9, 16 (5 possibilità). Quello che indica i minuti è un quadrato perfetto se è 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 (8 possibilità). Poiché ciascuna delle ore si può accoppiare con ciascuno dei minuti, le combinazioni possibili sono $5 \cdot 8 = 40$.

3) La risposta è **(C)**.
Infatti per il teorema di Pitagora il segmento OQ è uguale a $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; inoltre $MNOQ$ è un rettangolo, per cui $MN = OQ = 13$. Si ricava quindi che il perimetro del pentagono è 46 cm sommando le lunghezze di tutti i suoi lati.

4) La risposta è **(A)**.
$(12{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{111}) = (12{,}5 \cdot 8) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{111}) = 100 \cdot 10^{-3+111} = 10^2 \cdot 10^{108} = 10^{110}$.

5) La risposta è **(C)**.
La somma dei numeri su una diagonale è $16+10+4 = 30$. Analizzando i numeri sulla prima riga si ha dunque $16 + 2 + a = 30$, da cui $a = 12$. Analogamente, analizzando i numeri sulla prima colonna si ha $16 + b + c = 30$, da cui $b + c = 14$. Pertanto $a + b + c = 12 + 14 = 26$.

6) La risposta è **(B)**.
Il prodotto NON è multiplo di 5 se e solo se nessuno dei due numeri estratti è multiplo di 5 (poiché 5 è un numero primo). Gli unici multipli di 5 compresi fra 1 e 12 sono i numeri 5 e 10, pertanto la probabilità che nessuno dei due numeri estratti sia multiplo di 5 è $\left(\frac{10}{12}\right)^2 = \frac{25}{36}$. La probabilità cercata è quella del caso complementare, ed è dunque uguale a $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

7) La risposta è **(D)**.
Infatti

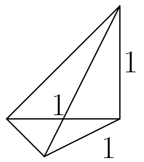
$$1999^{1999} = 1999^{2 \cdot 999+1} = (1999^2)^{999} \cdot 1999 \;;$$

l'ultima cifra di 1999^2 è 1 e quindi anche l'ultima cifra di $(1999^2)^{999}$ è 1. Infine moltiplicando questo numero per 1999 si ottiene un numero la cui ultima cifra è 9.

8) La risposta è **(C)**.
Infatti il pezzo ottenuto è una piramide avente per base un triangolo isoscele e rettangolo, con il vertice che si proietta ortogonalmente sulla base all'intersezione dei cateti.

In tale piramide i due cateti suddetti e l'altra valgono 1, e dunque per la formula del volume della piramide si ha

$$V = \frac{1}{3}\text{area di base} \times \text{altezza} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$



9) La risposta è **(D)**.
Se scriviamo $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, abbiamo che sia $x-y$, sia x^2+xy+y^2 sono sempre positivi (perché $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ è somma di due quadrati).
Infine si può verificare che tutte le altre risposte sono sbagliate ponendo $x = 0$ e $y = -1$.

10) La risposta è **(C)**.
La velocità relativa dei due ciclisti è di 5 km/h. Essi partono a una distanza di 200 m (mezzo giro di pista). Per percorrere 200 m a 5 km/h ci vuole lo stesso tempo che a percorrere 1600 m (4 giri) a 40 km/h.

11) La risposta è **(C)**.
Infatti in questo modo scriviamo 2 numeri interi ogni 6 (quelli che, divisi per 6, danno come resto 1 o 5). Pertanto tra 1 e $999 \cdot 6 = 5994$ ci sono esattamente $999 \cdot 2 = 1998$ interi che non sono multipli di 2 o di 3. Il 1999–esimo sarà quindi 5995.

12) La risposta è **(B)**.
Si ha

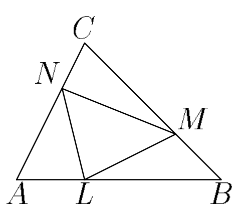
$$\text{area}(ALN) = \frac{2}{3}\text{area}(ALC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\text{area}(ABC)\ .$$

Dunque

$$\text{area}(ALN) = \text{area}(BML) = \text{area}(CNM) = \frac{2}{9}\text{area}(ABC)\ .$$

Di conseguenza

$$\text{area}(LMN) = \text{area}(ABC) - \text{area}(ALN) - \text{area}(BML) - \text{area}(CNM) = \frac{1}{3}\text{area}(ABC)\ .$$



13) La risposta è **(D)**.
Infatti se $y = 99 + 70 \cdot \sqrt{2}$, si ha che $xy = 9801 - 4900 \cdot 2 = 1$, per cui $x = \frac{1}{y}$. Siccome y è positivo e maggiore di 100, x è positivo e minore di $\frac{1}{100}$.
Seconda Soluzione
Infatti se $y = 5 \cdot \sqrt{2} - 7$, si ha che

$$y^2 = 25 \cdot 2 - 2 \cdot 35 \cdot \sqrt{2} + 49 = 99 - 70 \cdot \sqrt{2} = x\ .$$

Siccome $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}42$ si ha che $0 < y < \frac{1}{10}$ e $x = y^2$ è strettamente compreso tra 0 e $\frac{1}{100}$.

14) La risposta è **(D)**.
Quando la lancetta delle ore è in corrispondenza del minuto 23, essa ha compiuto i $\frac{3}{5}$ del percorso tra il minuto 20 (corrispondente alle 16) e il minuto 25 (corrispondente alle 17). Poiché $\frac{3}{5}$ di un'ora equivalgono a 36 minuti sono le 16:36.

15) La risposta è **(E)**.
Il numero primo piú piccolo è 2, mentre gli altri sono tutti dispari. Nella somma ci sono pertanto un addendo pari e 24 addendi dispari, per cui la somma è pari. L'unica cifra pari fra le risposte è 0 e quindi **(E)** è l'unica risposta che può essere corretta (si osservi che è stabilito a priori che c'è una e una sola risposta corretta). D'altra parte, si può verificare che, essendo i primi 25 numeri primi i seguenti: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$, la cifra richiesta si ottiene considerando la cifra delle unità del numero ottenuto sommando le cifre delle unità di tali numeri primi, e si ottiene 0.

16) La risposta è **(A)**.
Ci sono soltanto le radici 0 e 3. Infatti, posto $y = 2^x$, si ottiene $9 - y = 8/y$, ossia $y^2 - 9y + 8 = 0$, da cui $y = 1$ oppure $y = 8$.

17) La risposta è **(B)**.
I casi possibili sono tutte le possibili scelte di 8 oggetti fra 16, cioè $\binom{8}{16}$. I casi favorevoli nella situazione **(A)**sono $\binom{4}{8} \cdot \binom{4}{8} = 4900$ in quanto si debbono scegliere 4 calzini blu su 8 e 4 calzini neri su 8. I casi favorevoli nella situazione **(B)** sono $2 \cdot \binom{5}{8} \cdot \binom{3}{8} = 2 \cdot \binom{3}{8}^2 = 6272$ in quanto si possono scegliere o 3 calzini blu e 5 neri o 3 calzini neri e 5 blu. Analogamente, nelle situazioni **(C)**, **(D)**, **(E)**, i casi favorevoli sono rispettivamente $2 \cdot \binom{2}{8}^2$, $2 \cdot \binom{1}{8}^2$, $2 \cdot \binom{0}{8}^2$ che sono in numero inferiore alla situazione **(B)**.

18) La risposta è **(E)**.
La **(D)** è falsa in quanto ogni triangolo equiangolo è isoscele rispetto a ogni suo lato, e dunque è equilatero. Per verificare che **(A)**, **(B)**, **(C)** sono false, basta considerare un rombo che non sia un quadrato, un rettangolo che non sia un quadrato, e, ad esempio, un trapezio rettangolo ottenuto tagliando un quadrato con una retta non parallela a nessun lato, e che tagli due lati opposti.
Per verificare infine che **(E)** è vera si consideri ad esempio un pentagono regolare, tagliato da una retta parallela ad un lato e "molto vicina" ad esso.

19) La risposta è **(C)**.
Il primo ragazzo può stare in 3 posizioni (sinistra, centro o destra della foto); il secondo può stare nelle due posizioni non occupate dal primo; il terzo deve stare nell'unica posizione non occupata dagli altri due. Pertanto essi possono sistemarsi in $3 \times 2 \times 1 = 6$ modi diversi. Allo stesso modo, per ogni possibile posizione dei ragazzi, le ragazze possono sistemarsi in 6 modi diversi, per un totale di $6 \times 6 = 36$ posizioni possibili.

20) La risposta è **(D)**.
L'ultima cifra dovrà sicuramente essere uno zero (altrimenti n non è divisibile nemmeno per 10). A questo punto la somma delle rimanenti cifre deve fare 1999 e dunque, poiché $222 \cdot 9 = 1998 <$

1999, le altre cifre saranno almeno 223, e quindi n avrà almeno 224 cifre. D'altra parte il numero $2\underbrace{99\ldots9}_{221\text{cifre}}80$ ha esattamente 224 cifre la cui somma è 1999, ed è divisibile per 20 in quanto termina con 20.

21) La risposta è **(B)**.
Chiamiamo T_1 uno dei due punti di tangenza e O il centro del cerchio di cui dobbiamo trovare il raggio, che indichiamo con r. Sappiamo che $AO = r$, $OC = OT_1\sqrt{2} = r\sqrt{2}$ e $AC = 2$. Quindi possiamo scrivere $2 = r + r\sqrt{2}$, da cui ricaviamo

$$r = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}-1)\ .$$

22) La risposta è **(C)**.
Supponiamo infatti che sia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{7}{3}$. Allora con semplici calcoli ricaviamo che $3a^2 - 7ba + 3b^2 = 0$. Questa è una equazione di secondo grado rispetto all'incognita a, il cui discriminante vale $13b^2$. Poiché 13 non è un quadrato perfetto, il discriminante non è un quadrato perfetto, e dunque a non può essere intero. D'altra parte gli altri numeri proposti si possono rappresentare nella forma richiesta. Infatti: $\frac{25}{12} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$, $\frac{10}{3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{1}$, $\frac{17}{4} = \frac{1}{4} + \frac{4}{1}$, $\frac{29}{10} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5}$.

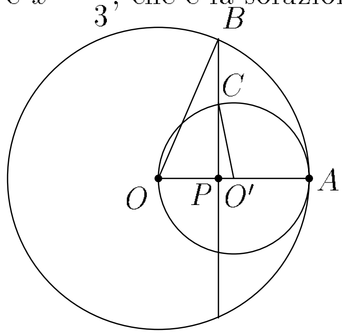
23) La risposta è **(E)**.
Se Andrea fosse un cavaliere le affermazioni degli altri tre sarebbero correttamente riferite, ma questo non è possibile. Infatti se Bruno fosse un cavaliere allora Carlo sarebbe un furfante e dunque Diego un cavaliere e infine Bruno un furfante, assurdo. Ma se Bruno fosse un furfante allora Carlo sarebbe un cavaliere e dunque Diego un furfante e infine Bruno un cavaliere, ancora assurdo. Quindi Andrea è un furfante, mentre nulla si può dire sugli altri.

24) La risposta è **(B)**.
Ricordiamo che un numero è divisibile per 11 quando la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quelle di posto dispari è 0, 11 o un suo multiplo. Di conseguenza il numero cercato è formato da cifre 3 e 5 alternate. Se infatti nel numero richiesto vi fossero due cifre uguali vicine (una di posto pari e l'altra di posto dispari) sarebbe possibile ottenere da esso un altro numero con le caratteristiche richieste, ma con meno cifre sopprimendo tale coppia di cifre uguali. Sia $2n + 1$ il numero di cifre cercato. Si hanno allora due casi:

- La cifra delle unità è 5. In questo caso nel numero compare $n+1$ volte la cifra 5 e n volte la cifra 3. Quindi $5(n+1) - 3n = 2n + 5$ deve valere 0 o un multiplo di 11. Per minimizzare n, devo scegliere il multiplo più piccolo che fornisce una soluzione n intera, cioè 11 stesso e si ottiene $n = 3$. In questo caso il numero risultante ha 7 cifre, ed è 5353535.
- La cifra delle unità è 3. In questo caso nel numero compare $n+1$ volte la cifra 3 e n volte la cifra 5. Quindi $5n - 3(n+1) = 2n - 3$ deve valere 0 o un multiplo di 11. Per minimizzare n, devo scegliere il multiplo più piccolo che fornisce una soluzione n intera, cioè di nuovo 11 stesso e si ottiene $n = 7$. In questo caso il numero risultante ha 15 cifre, e non è quindi quello richiesto.

25) La risposta è **(D)**.
Indichiamo con x la lunghezza del segmento OP. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli OPB e $O'PC$, e imponendo che $PB = 2PC$ si ha che $\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{1 - (1-x)^2}$ da cui, elevando al quadrato e riordinando i termini, $3x^2 - 8x + 4 = 0$. Risolvendo si ottiene $x = 2$ (da scartare)

e $x = \dfrac{2}{3}$, che è la soluzione cercata.



Seconda Soluzione

I triangoli rettangoli OPB e $O'PC$ sono simili. Infatti l'ipotenusa e un cateto dell'uno sono il doppio dell'ipotenusa e un cateto dell'altro. Quindi $OP = 2PO'$ e $OP + PO' = 1$ da cui $OP = 2(1 - OP)$ e $OP = \dfrac{2}{3}$.