I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

1 dicembre 1999

D	A	B	A	E	C	D	C	B	D	E	A	B	E	C	B	D	C	C	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(D)**.
La frazione richiesta è infatti ottenibile togliendo da 1 (che rappresenta la totalità degli alunni) la frazione degli alunni pienamente promossi e quella degli alunni promossi con debiti. Si ottiene quindi

$$1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

2) La risposta è **(A)**.
$(12,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{111}) = (12,5 \cdot 8) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{111}) = 100 \cdot 10^{-3+111} = 10^2 \cdot 10^{108} = 10^{110}$.

3) La risposta è **(B)**.
Infatti $35 = 7 \times 5$, quindi i lati sono lunghi 24 m e 16 m e il perimetro è $(16+24+16+24)$ m $= 80$ m.

4) La risposta è **(A)**.
Chiamiamo x il numero cercato. Esso risolve l'equazione $x/10 = 10 \cdot x^2$, le cui soluzioni sono 0 e $1/100$. Dato che $x \neq 0$ si ha $x = 1/100$.

5) La risposta è **(E)**.
Tracciamo sul quadrante della torre un segmento che congiunge il centro con la tacca delle 12 e misuriamo in senso orario gli angoli formati dalle lancette con il segmento stesso. Se da mezzogiorno in punto sono passate x ore e y minuti allora l'angolo formato dalla lancetta dei minuti col segmento misura $6y$ gradi, mentre quello formato dalla lancetta delle ore misura $30x + y/2$. Le due lancette sono perpendicolari tra loro se e solo se $(30x + y/2) - 6y = 90$ oppure $6y - (30x + y/2) = 90$. Perciò tra le 7 in punto e le 7 e 59 minuti le lancette dell'orologio sono perpendicolari per due volte; a questo punto dobbiamo solo vedere quando saranno perpendicolari la prima volta dopo le 8, cioè ci basterà risolvere

$$30 \cdot 8 + y/2 - 6y = 90.$$

Dall'equazione otteniamo $y = [(30 \cdot 8 - 90) \cdot 2]/11 = 60 \cdot 5/11 > 25$.
Seconda Soluzione
Ad ogni istante le due lancette formeranno tra loro due angoli: misuriamoli in gradi e chiamiamo γ il minimo tra i due numeri ottenuti. Tra le 7.00 e le 8.00 le lancette dell'orologio sono perpendicolari tra loro due volte: infatti alle 7.00 γ è un numero maggiore di 90 e minore di 180; cresce fino a che le due lancette non sono una opposta all'altra; diminuisce fino a che non si sovrappongono; infine aumenta e, alle 8.00, è un numero maggiore di 90. Ne deduciamo che γ vale 90 solo due volte. Un discorso analogo si può fare anche dalle 8.00 alle 9.00 e, poiché in tal caso la lancetta delle ore sarà sempre oltre la quarantesima tacca dei minuti, tra le 8.00 e le 8.25 γ sarà sempre maggiore di 90.

6) La risposta è **(C)**.
Infatti per il teorema di Pitagora il segmento OQ è uguale a $\sqrt{12^2+5^2}=13$; inoltre $MNOQ$ è un rettangolo, per cui $MN=OQ=13$. Si ricava quindi che il perimetro del pentagono è 46 cm sommando le lunghezze di tutti i suoi lati.

7) La risposta è **(D)**.
Infatti
$$1999^{1999}=1999^{2\cdot 999+1}=(1999^2)^{999}\cdot 1999;$$
l'ultima cifra di 1999^2 è 1 e quindi anche l'ultima cifra di $(1999^2)^{999}$ è 1. Infine moltiplicando questo numero per 1999 si ottiene un numero la cui ultima cifra è 9.

8) La risposta è **(C)**.
È evidente che per negare l'asserto occorre e basta una scuola in cui non ci sono classi con tutti promossi. Più formalmente, trascrivendo l'asserto come
$$(\forall S)(\exists C\in S)(\forall x\in C).\mathrm{prom}(x)$$
e applicando le equivalenze $\neg\forall\equiv\exists\neg$ e $\neg\exists\equiv\forall\neg$ si ottiene
$$\neg(\forall S)(\exists C\in S)(\forall x\in C).\mathrm{prom}(x)\equiv(\exists S)\neg(\exists C\in S)(\forall x\in C).\mathrm{prom}(x)\equiv$$
$$(\exists S)(\forall C\in S)\neg(\forall x\in C).\mathrm{prom}(x)\equiv(\exists S)(\forall C\in S)(\exists x\in C).\neg\mathrm{prom}(x)$$

9) La risposta è **(B)**.
Una volta estratto il 27, rimangono 89 bussolotti, tutti equiprobabili.

10) La risposta è **(D)**.
L'area richiesta si ottiene sommando l'area di quattro rettangoli di lati 30 m e 100 m con l'area di un cerchio di raggio 100 m. In definitiva l'area richiesta è circa uguale a $12\,000+31\,400$ m^2, che è un valore compreso fra 4 e 5 ettari.

11) La risposta è **(E)**.
Il numero che indica le ore è un quadrato perfetto se è 0, 1, 4, 9, 16 (5 possibilità). Quello che indica i minuti è un quadrato perfetto se è 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 (8 possibilità). Poiché ciascuna delle ore si può accoppiare con ciascuno dei minuti, le combinazioni possibili sono $5\cdot 8=40$.

12) La risposta è **(A)**.
Infatti $a=3b$, $c=2b$; quindi $\dfrac{2a}{3c}=\dfrac{6b}{6b}=1$.

13) La risposta è **(B)**.
È facile verificare che $43^2<1900$ e $45^2>2000$. Il lato del campo deve dunque misurare 44 metri, e dunque l'area del campo vale 1936 m^2. Ne segue che ognuno dei due figli riceverà esattamente 968 m^2.

14) La risposta è **(E)**.
Il primo in ordine alfabetico è 100, l'ultimo è 21.

15) La risposta è **(C)**.
La somma dei numeri su una diagonale è $16+10+4=30$. Analizzando i numeri sulla prima riga si ha dunque $16+2+a=30$, da cui $a=12$. Analogamente, analizzando i numeri sulla prima colonna si ha $16+b+c=30$, da cui $b+c=14$. Pertanto $a+b+c=12+14=26$.

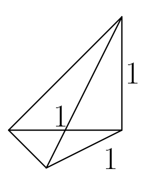
16) La risposta è **(B)**.
Il prodotto NON è multiplo di 5 se e solo se nessuno dei due numeri estratti è multiplo di 5 (poiché 5 è un numero primo). Gli unici multipli di 5 compresi fra 1 e 12 sono i numeri 5 e 10, pertanto la probabilità che nessuno dei due numeri estratti sia multiplo di 5 è $(\frac{10}{12})^2 = \frac{25}{36}$. La probabilità cercata è quella del caso complementare, ed è dunque uguale a $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

17) La risposta è **(D)**.
Infatti le coppie di piani perpendicolari sono in corrispondenza biunivoca con gli spigoli del cubo, che sono 12.
Seconda Soluzione
Possiamo considerare che ciascun piano ne ha altri quattro perpendicolari a lui e che i piani in tutto sono 6; se moltiplichiamo questi due numeri otteniamo 24 e in tal modo avremo contato esattamente due volte ciascuna coppia: se ne deduce nuovamente che le coppie sono 12.

18) La risposta è **(C)**.
La distanza fra due lampioni successivi si ottiene calcolando il massimo comun divisore fra 150, 210 e 300, ed è quindi 30 metri. Il numero di lampioni da installare su ogni lato di ciascuna strada sarà quindi 6, 8 e 11 rispettivamente. Il numero totale di lampioni occorrenti è quindi $2 \times (6 + 8 + 11) = 50$.

19) La risposta è **(C)**.
Infatti il pezzo ottenuto è una piramide avente per base un triangolo isoscele e rettangolo, con il vertice che si proietta ortogonalmente sulla base all'intersezione dei cateti.
In tale piramide i due cateti suddetti e l'altezza valgono 1, e dunque si ha

$$V = \frac{1}{3}\text{area di base} \times \text{altezza} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$



20) La risposta è **(D)**.
L'ultima cifra dovrà sicuramente essere uno zero (altrimenti n non è divisibile nemmeno per 10). A questo punto la somma delle rimanenti cifre deve fare 1999 e dunque, poiché $222 \cdot 9 = 1998 < 1999$, le altre cifre saranno almeno 223, e quindi n avrà almeno 224 cifre. In effetti il numero $2\underbrace{99\ldots9}_{221 \text{cifre}}80$ ha esattamente 224 cifre la cui somma è 1999, ed è divisibile per 20 in quanto termina con 20.