I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio
2 dicembre 1998

B	B	B	B	D	B	E	C	D	D	B	E	B	D	E	C	D	E	E	C	B	C	E	A	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(B)**.
Poiché $0{,}\overline{3} = \dfrac{1}{3}$ si ha $(0{,}\overline{3})^2 < 0{,}3 < 0{,}\overline{3}$, d'altra parte $0{,}\overline{3} < 1 < \dfrac{1}{0{,}\overline{3}} < \dfrac{1}{0{,}3}$.

2) La risposta è **(B)**.
In ogni triangolo ABC la lunghezza di AB è maggiore o uguale alla lunghezza di BC meno la lunghezza di AC (supponendo $BC \geq AC$), ed è uguale a tale differenza solo se ABC sono allineati ed A si trova tra B e C.

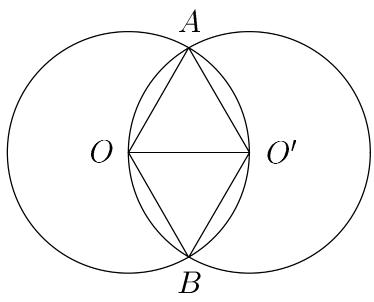
3) La risposta è **(B)**.
Unendo i centri di circonferenze tangenti esternamente, il segmento che si ottiene ha lunghezza pari alla somma dei raggi. Il triangolo che ha per vertici i centri delle circonferenze date ha quindi lati di lunghezza 3, 4, 5, ed è quindi un triangolo rettangolo. Ricordando che ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una circonferenza avente per diametro l'ipotenusa, si ha che il raggio richiesto è $5/2 = 2{,}5$.

4) La risposta è **(B)**.
Ricordiamo che $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$; si ha quindi che $x = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{3}^{2} = 3$ e
$y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \sqrt{2}^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{2}^{3} = \sqrt{8}$. Poiché $3^2 = 9 > 8$ si ha $x > y$, ma $x^2 - y^2 = 1$.

5) La risposta è **(D)**.
Poiché in un poligono convesso di n lati da ogni vertice escono $n-3$ diagonali, il numero totale delle diagonali è $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Imponendo $\dfrac{n(n-3)}{2} = 4n$, si ottiene $n - 3 = 8$, da cui $n = 11$.

6) La risposta è **(B)**.
È impossibile che la prima relazione sia vera e le altre due siano entrambe false; se è vera solo la seconda si può concludere che $x > 5$, se è vera solo la terza (e le prime due sono false), si può concludere che $x < 5$. Poiché entrambe le soluzioni sono possibili, si può solo concludere che $x \neq 5$.

7) La risposta è **(E)**.
L'area dell'intersezione è data dall'area di due triangoli equilateri di lato 1 e dei 4 settori circolari come quello tratteggiato in figura. L'area di un settore si ottiene come differenza tra l'area della fetta $OO'A$ che è un 1/6 dell'area del cerchio di raggio 1 e quello del triangolo equilatero di lato 1. Quindi si ha che l'area è uguale a



$$4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

8) La risposta è **(C)**.
Indipendentemente dall'ultimo numero estratto, la probabilità che tre numeri compaiano in ordine crescente è uguale alla probabilità che il piú piccolo tra essi venga estratto per primo, uguale a $\frac{1}{3}$, moltiplicata per la probabilità che il piú piccolo fra gli altri due venga estratto per secondo, uguale a $\frac{1}{2}$.

Alternativamente si può osservare che le possibilità totali per i primi tre estratti sono $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (cioè tutte le possibili terne ordinate di numeri da 1 a 4), mentre i casi favorevoli sono soltanto 4 (cioè le terne 123, 124, 134, 234). Quindi la probabilità è $\dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

9) La risposta è **(D)**.
Se ogni *perdente* riceve N caramelle e ogni *vincente* ne riceve $2N$, essendoci 6 *vincitori* e 24 *perdenti*, il totale delle caramelle distribuite deve essere $6 \times 2N + 24 \times N = 36N$. Ponendo $36N = 540$ si ha $N = 15$, quindi ogni *vincitore* riceve 30 caramelle.

10) La risposta è **(D)**
Infatti $C\hat{B}D = 90^o$ e $B\hat{D}C = 35^o$, in quanto insiste sullo stesso arco di di $B\hat{A}C$, pertanto $B\hat{C}D = 180^o - 90^o - 35^o = 55^o$.

11) La risposta è **(B)**.
Infatti la negazione della frase data è che non tutti i numeri perfetti sono pari, e quindi esiste almeno un numero perfetto che è dispari.

12) La risposta è **(E)**.
Il volume del parallelepipedo desiderato è di $3 \times 4 \times 5 = 60\,\text{cm}^3$. Il volume reale potrà variare da un minimo di $2{,}9 \times 3{,}9 \times 4{,}9 \approx 55{,}4\,\text{cm}^3$ ad un massimo di $3{,}1 \times 4{,}1 \times 5{,}1 \approx 64{,}8\text{cm}^3$.

Si osservi che lo scostamento massimo è dato dal volume di uno spessore applicato a tre facce del parallelepipedo desiderato di altezza 1 mm e che questo volume è, in prima approssimazione, il prodotto della metà della superficie laterale per l'altezza di 1 mm, e cioè $4{,}7\,\text{cm}^3$.

13) La risposta è **(B)**.
Si può effettuare un punteggio ≤ 5 solo con $1, 1, 1$ o $1, 1, 2$ o $1, 1, 3$ o $1, 2, 2$.
Mentre il primo risultato si può ottenere in modo unico, ognuno degli altri può essere ottenuto in tre modi diversi (ad esempio, per il risultato $1, 1, 2$, si può ottenere 2 al primo o al secondo o al terzo lancio).
Poiché i possibili risultati (ordinati!) lanciando tre dadi sono $6^3 = 216$, la probabilità cercata è uguale a

$$\frac{1+3+3+3}{216} = \frac{10}{216} \approx 0{,}046.$$

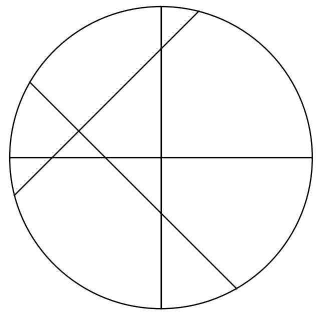
14) La risposta è **(D)**.
Contare il numero di zeri con cui termina un numero n significa vedere qual è la massima potenza di $10 = 2 \cdot 5$ per cui è divisibile n.
Si tratta dunque di vedere, qual è il minimo tra gli esponenti di 2 e di 5 nella fattorizzazione del numero n.
Per **(A)** e **(B)** è 2 ;
per **(C)** è 3 ;
per **(D)** è 6 ;
per **(E)** è 4 .

15) La risposta è **(E)**.
Infatti si ha che $x^2 + y^2 - 4(y-1) = x^2 + (y-2)^2$ è sempre ≥ 0, ed è zero solo se $x = 0$, $y = 2$, che non verificano l'ipotesi, dunque la **(E)** è sicuramente falsa se $xy < x$.
D'altra parte si osservi che le altre risposte possono essere vere per opportuni valori di x e y:
- **(A)** e **(B)** sono vere, ad esempio, per $x = -1$, $y = 2$
- **(C)** è vera ad esempio per $x = 1$, $y = -2$
- **(D)** è vera ad esempio per $x = 1$, $y = 0$.

16) La risposta è **(C)**.
Supponiamo di avere già effettuato $k-1$ tagli. Il k-esimo taglio (che possiamo supporre diverso dai precedenti) incontrerà i precedenti in un certo numero h di punti distinti interni alla torta. Allora il k-esimo taglio attraverserà $h+1$ parti distinte della torta, dividendo ciascuna di esse in due: l'effetto sarà dunque di aumentare il numero di parti della torta di una quantità pari a $h+1$. D'altra parte, poiché due rette distinte si possono incontrare in al piú un punto, si ha che $h \leq k-1$, e quindi con il k-esimo taglio il numero di parti della torta aumenterà di al piú k.
Partendo dalla situazione iniziale (1 sola parte), il numero di parti che si possono venire a creare con 4 tagli è al piú

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11.$$

D'altra parte la figura mostra come si possano ottenere 11 parti con 4 tagli.



17) La risposta è **(D)**.
Sappiamo che in ogni triangolo il baricentro divide ogni mediana in due segmenti che stanno tra loro nel rapporto $2:1$.
Ciò significa che l'altezza del triangolo GAB relativa al lato AB è $1/3$ dell'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB, e dunque l'area del triangolo GAB è $1/3$ dell'area del triangolo ABC.
Lo stesso vale anche per i triangoli GBC e GCA.
Dunque GAB, GBC, GCA hanno la stessa area.

18) La risposta è **(E)**.
Il numero 10062 è, per verifica diretta, l'unico fra i numeri elencati divisibile sia per 3 che per 13. Non è però il piú piccolo numero di 5 cifre con questa proprietà, in quanto anche $10062 - 3 \cdot 13 = 10023$ la possiede.

19) La risposta è **(E)**.
Poniamo uguale a 1 il lato dei triangoli piú piccoli. Per ogni triangolo equilatero, chiamiamo semplicemente vertice del triangolo il vertice opposto al suo lato orizzontale. Allora ci sono:
- 16 triangoli di lato 1 (10 con il vertice in alto e 6 con il vertice in basso);
- 7 triangoli equilateri di lato 2, di cui 6 con il vertice in alto e 1 con il vertice in basso (il punto medio del lato inferiore della figura);
- 3 triangoli equilateri di lato 3 (tutti con il vertice in alto);
- 1 triangolo equilatero di lato 4 (la cornice dell'intera figura).

20) La risposta è **(C)**.
Affinché detto n un numero qualsiasi, la somma delle cifre di $n+1$ non sia uguale alla somma delle cifre di n aumentata di 1 è necessario (e sufficiente) che l'ultima cifra di n sia 9. In tal caso la somma delle cifre di $n+1$ è pari a quella delle cifre di n diminuita di 8. Sia x la somma delle

cifre dell'età di Andrea (e di Sara). Si deve allora avere:

$$4(x-8) = x+1, \text{ da cui}$$

$$3x = 33,$$

$$x = 11$$

Dunque l'età di Andrea è 29 anni, e l'età di Sara è di 38 anni.

21) La risposta è **(B)**.
Rimontando la piramide si ottiene che la sua altezza è un cateto di un triangolo rettangolo di cui:
- l'ipotenusa è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele in figura;
- l'altro cateto è 1/3 dell'altezza del triangolo equilatero in figura.
L'altezza della piramide è quindi uguale a

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

e il suo volume è uguale a

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

22) La risposta è **(C)**.
La ragazza è infatti sicuramente un paggio: non può essere un cavaliere (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere vera) e neppure un furfante (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere falsa). Quindi la prima affermazione della ragazza è falsa e la sua seconda affermazione deve essere vera, cioè il vecchio è un paggio. La prima affermazione del vecchio è quindi vera e la seconda deve essere falsa; quindi il ragazzo non è un cavaliere. Egli non può essere un furfante, altrimenti anche la seconda sua affermazione dovrebbe essere falsa, mentre si è visto che tale affermazione è vera. Quindi anche il ragazzo è paggio.

23) La risposta è **(E)**.
Infatti si ha $\frac{4^{1998}}{2} = 2^{1998 \cdot 2 - 1} = 2^{3995}$.

24) La risposta è **(A)**.
Poiché $\frac{1}{x} = 1{,}1\ldots \geq \frac{11}{10}$, si ha $0{,}9 \leq x \leq \frac{10}{11} = 0{,}909\ldots$ e quindi la seconda cifra decimale è 0.

25) La risposta è **(D)**.
Fattorizziamo i 5 numeri:

$$1968 = 2^4 \cdot 3 \cdot 41 \quad 1988 = 2^2 \cdot 7 \cdot 41 \quad 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \quad 2008 = 2^3 \cdot 251 \quad 2048 = 2^{11}$$

da cui:

$$1968 = 3 \cdot 16 \cdot 41 \quad 1988 = 4 \cdot 7 \cdot 41 \quad 1998 = 2 \cdot 27 \cdot 37 \quad 2048 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 32$$

dividono 100!, mentre 2008 non può dividere 100! perché allora il primo 251 lo dividerebbe, ma 251, essendo maggiore di 100, non può essere fattore di nessun numero tra 1 e 100.