I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio
2 dicembre 1998

C	A	A	D	A	C	B	B	C	C	A	E	B	D	D	B	C	E	A	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(C)**.
Infatti $0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{1000} = 0{,}027$.

2) La risposta è **(A)**.
La diagonale AC è anche un diametro del cerchio circoscritto.
Il quadrato della lunghezza di AC è uguale a

$$(64 + 36)\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$$

e l'area del cerchio è quindi uguale a

$$\pi(\frac{100}{4})\ \mathrm{cm}^2 = 25\pi\ \mathrm{cm}^2.$$

3) La risposta è **(A)**.
Invece:
(B) corrisponde al consecutivo del triplo del quadrato di n,
(C) è il quadrato del consecutivo del triplo di n;
(D)è il triplo del consecutivo del quadrato di n;
(E)è il triplo del quadrato del consecutivo di n.

4) La risposta è **(D)**.
Se ogni *perdente* riceve N caramelle e ogni *vincente* ne riceve $2N$, essendoci 6 *vincitori* e 24 *perdenti*, il totale delle caramelle distribuite deve essere $6 \times 2N + 24 \times N = 36N$. Ponendo $36N = 540$ si ha $N = 15$, quindi ogni *vincitore* riceve 30 caramelle.

5) La risposta è **(A)**.
Se il lato del quadrato è 1, il raggio della circonferenza inscritta in esso è $1/2$. Ricordando che il lato di un esagono inscritto in una circonferenza ha lunghezza pari al raggio, si ha la risposta.

6) La risposta è **(C)**.
Il 25% della produzione mondiale è pari al 38% della produzione europea. Quindi la produzione europea è il $\dfrac{25}{38} \times 100\%$ di quella mondiale, cioè circa il 65,8%

7) La risposta è **(B)**.
In ogni triangolo ABC la lunghezza di AB è maggiore o uguale alla lunghezza di BC meno la lunghezza di AC (supponendo $BC \geq AC$), ed è uguale a tale differenza solo se ABC sono allineati ed A si trova tra B e C.

8) La risposta è **(B)**.
Poiché $0{,}\overline{3} = \dfrac{1}{3}$ si ha $(0{,}\overline{3})^2 < 0{,}3 < 0{,}\overline{3}$, d'altra parte $0{,}\overline{3} < 1 < \dfrac{1}{0{,}\overline{3}} < \dfrac{1}{0{,}3}$.

9) La risposta è **(C)**.
Poiché 13 e 3 sono numeri primi, i loro multipli comuni devono essere multipli di $13 \cdot 3 = 39$. La tabellina del 39 inizia con $39, 78, 117, \ldots$

10) La risposta è **(C)**.
Il rapporto dei volumi di due sfere è uguale al cubo del rapporto dei rispettivi raggi.
I volumi delle sfere considerate sono dunque proporzionale a $1, 8, 27$, quindi si verifica facilmente che **(C)** è vera mentre le altre sono false (si ricordi che il rapporto delle superfici di due sfere è uguale al quadrato del rapporto dei rispettivi raggi).

11) La risposta è **(A)**.
Infatti, posta uguale a 1 la lunghezza dei tratti orizzontali e verticali, quelli obliqui hanno lunghezza $\sqrt{2}$. È dunque facile vedere che:

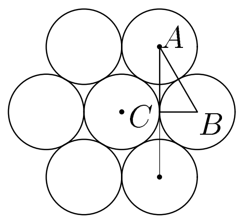
1,4 e 7	hanno lunghezza	$2 + \sqrt{2}$
2	ha lunghezza	$3 + \sqrt{2}$
3	ha lunghezza	$2 + 2\sqrt{2}$
5	ha lunghezza	5
6 e 9	hanno lunghezza	$4 + \sqrt{2}$
8	ha lunghezza	7

pertanto 3 occupa il quinto posto nell'ordine per lunghezza.

12) La risposta è **(E)**.
Poniamo uguale a 1 il lato dei triangoli piú piccoli. Per ogni triangolo equilatero, chiamiamo semplicemente vertice del triangolo il vertice opposto al suo lato orizzontale. Allora ci sono:
- 16 triangoli di lato 1 (10 con il vertice in alto e 6 con il vertice in basso);
- 7 triangoli equilateri di lato 2, di cui 6 con il vertice in alto e 1 con il vertice in basso (il punto medio del lato inferiore della figura);
- 3 triangoli equilateri di lato 3 (tutti con il vertice in alto);
- 1 triangolo equilatero di lato 4 (la cornice dell'intera figura).

13) La risposta è **(B)**.
Infatti vi sono 5 persone che non giocano a calcio, 6 che non giocano a basket, 7 che non giocano a pallavolo: se sono tutte distinte, allora rimangono esattamente due persone che praticano tutti e tre gli sport. Ovviamente è possibile che qualcuno non giochi né a calcio né a basket, ecc.; in tal caso il numero delle persone che praticano tutti e tre gli sport aumenta.

14) La risposta è **(D)**.
I centri dei cerchi esterni sono i vertici di un esagono regolare di lato 2 nel triangolo ABC, l'angolo $A\hat{B}C$ vale 60^o, per cui $AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$.



15) La risposta è **(D)**.
Contare il numero di zeri con cui termina un numero n significa vedere qual è la massima potenza di $10 = 2 \cdot 5$ per cui è divisibile n.
Si tratta dunque di vedere, qual è il minimo tra gli esponenti di 2 e di 5 nella fattorizzazione del numero n.
Per **(A)** e **(B)** è 2 ;
per **(C)** è 3 ;
per **(D)** è 6 ;
per **(E)** è 4 .

16) La risposta è **(B)**.
Infatti i lati dei poligoni sono complessivamente $12 \cdot 5 = 60$; siccome ogni spigolo del poliedro è comune a due facce, si determinano $\frac{60}{2} = 30$ spigoli del poliedro.
Nei vertici del poliedro non possono ovviamente confluire meno di tre facce, e neppure piú di tre (l'angolo al vertice di un pentagono regolare vale $\frac{5-3}{5}\, 180^o = 108^o$ e $4 \cdot 108^o > 360^o$). Pertanto in ogni vertice confluiscono esattamente tre facce e quindi il numero di vertici è $\dfrac{60}{3} = 20$.

17) La risposta è **(C)**.
La ragazza è infatti sicuramente un paggio: non può essere un cavaliere (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere vera) e neppure un furfante (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere falsa). Quindi la prima affermazione della ragazza è falsa e la sua seconda affermazione deve essere vera, cioè il vecchio è un paggio. La prima affermazione del vecchio è quindi vera e la seconda deve essere falsa; quindi il ragazzo non è un cavaliere. Egli non può essere un furfante, altrimenti anche la seconda sua affermazione dovrebbe essere falsa, mentre si è visto che tale affermazione è vera. Quindi anche il ragazzo è paggio.

18) La risposta è **(E)**.
Siano x le lire che il giocatore ha inizialmente nel portafogli. Dopo aver pagato il parcheggio all'uscita della prima casa da gioco egli ha $2(x - 5000) - 5000$ lire
All'uscita della seconda casa da gioco egli ha $2(2x-15000)$ lire e siccome tale somma è esattamente quanto occorre per pagare il parcheggio, si ha $4x - 30000 = 6000$, da cui $x = 9000$ lire.

19) La risposta è **(A)**.
Poiché $\dfrac{1}{x} = 1{,}1\ldots \geq \dfrac{11}{10}$, si ha $0{,}9 \leq x \leq \dfrac{10}{11} = 0{,}909\ldots$ e quindi la seconda cifra decimale è 0.

20) La risposta è **(C)**.
Sia $\alpha n \geq 200$ il primo multiplo e $(\alpha + 12)n \leq 300$ l'ultimo. Affinché non ce ne siano piú di 13 si deve avere che $\alpha n - n < 200$ e $(\alpha + 12)n + n > 300$. Le condizioni che n deve soddisfare sono allora:

- $\alpha n \geq 200$
- $(\alpha - 1)n < 200$
- $(\alpha + 12)n \leq 300$
- $(\alpha + 13)n > 300$

Sottraendo la prima disuguaglianza dalla terza si ottiene $12n \leq 100$, che implica $n \leq 8$.
Sottraendo la seconda disuguaglianza dalla quarta si ha $14n > 100$ cioè $n > 7$.
Segue che n deve essere uguale a 8.
I 13 numeri $200, 208, \ldots, 296$ sono tutti e soli i multipli di 8 tra 200 e 300 (estremi inclusi).