I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

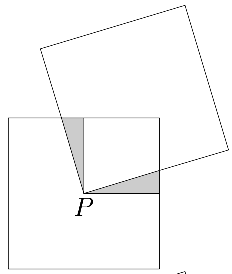
4 dicembre 1996

D	C	B	B	D	D	E	B	B	D	D	C	D	D	D	B	A	E	D	C	D	D	C	D	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

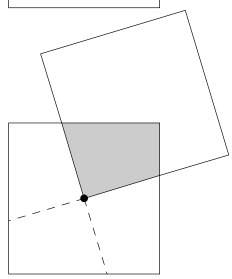
1) La risposta è **(D)**.
Infatti fra cinque interi consecutivi almeno uno è divisibile per 5, mentre almeno due sono pari. Dunque il prodotto è certamente divisibile per 10.

2) La risposta è **(C)**.
Due falcate del cane coprono $2 \cdot 2 = 4$ m, nello stesso tempo 3 falcate della lepre che scappa coprono $3 \cdot 1 = 3$ m. Dunque ogni volta che il cane percorre 4 m ne guadagna 1 sulla lepre, che quindi viene raggiunta in un punto che dista $\dfrac{4 \cdot 30}{1} = 120$ m dal punto A.

3) La risposta è **(B)**.
Se si conducono da P le parallele ai lati del quadrato, si vede che i due triangoli rettangoli ombreggiati sono uguali e quindi l'area della parte comune è quella del quadrato di lato 5 cm.



Seconda soluzione
La risposta è **(B)** come si deduce facilmente dalla figura a fianco, in quanto i quadrilateri in cui viene suddiviso il primo quadrato sono uguali.



4) La risposta è **(B)**.
Se lunedì ogni azione valeva 100, martedì ne valeva 90 e mercoledì ho venduto a 99, perdendo dunque l'1%.

5) La risposta è **(D)**.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAB si ricava

$$AB = \sqrt{20^2 - 10^2} \text{ cm} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

Quattro delle sbarre hanno lunghezza $2 \cdot AB$ e due sbarre sono lunghe come il diametro del cerchio. Pertanto la lunghezza complessiva è

$$L = (40 + 40 + 4 \cdot 2 \cdot 10\sqrt{3}) \text{ cm} = 80(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

6) La risposta è **(D)**.
Si ha infatti $((8^2)^2)^2 = (8^4)^2 = 8^8$.

7) La risposta è **(E)**.
Se le radici sono r e s si ha $r + s = -\frac{b}{a}$ e $r \cdot s = \frac{c}{a}$, dunque

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{r+s}{r \cdot s} = \frac{-b/a}{c/a} = -\frac{b}{c}$$

8) La risposta è **(B)**.
Aggiungendo e togliendo volumi da 21 e 15 litri posso ottenere tutti e soli i volumi (positivi o nulli) del tipo $\pm m \cdot 21 \pm n \cdot 15$ con m, n interi. Poiché 21 e 15 sono divisibili per 3, ottengo soltanto volumi divisibili per 3, perciò non posso avere 5 litri. Si osservi che $3 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21$ è un volume ottenibile, e quindi tutti i multipli di 3 lo sono.

9) La risposta è **(B)**.
Infatti, l'anno in cui è nato Antonio era bisestile, in quanto un anno non bisestile ha 52 settimane più un giorno e quindi ha un solo giorno della settimana che si ripete 53 volte. Inoltre in un anno bisestile i giorni che si ripetono 53 volte sono necessariamente il primo e il secondo giorno dell'anno. Allora il 1° gennaio era sabato e, contando che gennaio aveva 31 giorni e febbraio 29, il 1° marzo era mercoledì.

10) La risposta è **(D)**.
La probabilità che i due numeri siano uguali è pari a $\frac{1}{90}$, e quindi la probabilità che siano differenti è $\frac{89}{90}$. In tal caso la probabilità che il primo sia più piccolo del secondo è pari a quella che sia più grande, e quindi la probabilità cercata vale

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{89}{90} = \frac{89}{180}\ .$$

11) La risposta è **(D)**.
Infatti la cifra delle unità di $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ è 5 (verifica diretta), allo stesso modo si vede che $11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2 = (10+1)^2 + (10+2)2 + \cdots + (10+10)^2 = 10 \cdot k \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2)$ ha 5 come cifra delle unità. Lo stesso per $21^2 + 22^2 + \cdots + 30^2$, eccetera. Inoltre la cifra delle unità di $1991^2 + \ldots + 1996^2$ è uguale a 1. Pertanto il risultato è uguale all'ultima cifra di $199 \cdot 5 + 1$, e cioè 6.

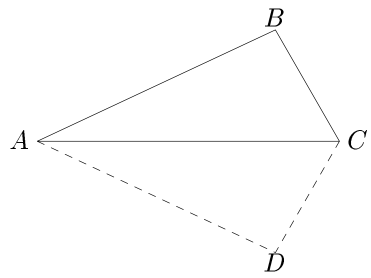
12) La risposta è **(C)**.
I punti di D sono infatti interni al cerchio di centro l'origine e raggio 1, ed esterni ai cerchi di centri $(1,1)$ e $(-1,-1)$ e di raggio 1. In altre parole D è costituito dai punti tratteggiati nella figura a fianco.

La suddetta figura può poi evidentemente essere "ritagliata e ricomposta" in modo da ottenere un quadrato, come mostrato nelle due figure a fianco.

L'area di tale quadrato è evidentemente 2.

13) La risposta è **(D)**.
Infatti, se $n > 1$ è un elemento di X, allora $n+1$ è maggiore di n ma non è multiplo di n e quindi appartiene ad X. Analogamente, tutti i numeri $n+2, n+3, \ldots$ appartengono ad X. Per quanto appena detto, **(A)** e **(B)** sono false. Inoltre l'insieme dei numeri interi maggiori di 10 fornisce un esempio di un insieme che soddisfa le proprietà richieste ma contraddice **(C)** ed **(E)**.

14) La risposta è **(D)**.
Infatti la somma degli angoli vale $360°$, quindi almeno uno di essi deve essere minore o uguale a $90°$. D'altra parte se si prende un triangolo ABC con gli angoli in A, B, C rispettivamente uguali a $25°$, $95°$, $60°$ (ad esempio) e lo si ribalta rispetto al lato AC si ottiene un quadrilatero $ABCD$ che ha tre angoli ottusi.
Per verificare che anche la risposta **(A)** è sbagliata si pensi al caso del rettangolo.



15) La risposta è **(D)**.
Si vede immediatamente che l'altezza h del rettangolo, e quindi quella del cilindro, è lunga $\frac{l}{2}$ e che la base è lunga $l\frac{\sqrt{3}}{2}$. Una circonferenza che è lunga $l\frac{\sqrt{3}}{2}$ ha raggio $r = l\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, pertanto il volume del cilindro è

$$V = \pi r^2 h = \pi l^2 \frac{3}{16\pi^2}\frac{l}{2} = \frac{3}{32}\frac{l^3}{\pi}$$

16) La risposta è **(B)**.
Infatti i possibili numeri che ha pensato il mio amico sono: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321.

17) La risposta è **(A)**.
Infatti, contando il numero delle cuciture adiacenti agli esagoni $(6 \cdot 20 = 120)$ più il numero delle cuciture adiacenti ai pentagoni $(5 \cdot 12 = 60)$ ogni cucitura viene contata due volte, poiché essa è adiacente a due poligoni.

18) La risposta è **(E)**.
I numeri della prima riga hanno somma $\frac{n(n+1)}{2}$, quelli della seconda $\frac{n(n+3)}{2}$, …quelli dell'ultima

$$\frac{n(2n-1+n)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \; .$$

Pertanto la somma di tutti i numeri è

$$\frac{n}{2}\left((n+1)+(n+3)+(n+5)+\cdots+(3n-1)\right) = \frac{n}{2}\cdot n \cdot \frac{(n+1)+(3n-1)}{2} = n^3$$

Seconda soluzione
Due numeri simmetrici rispetto alla diagonale formata da tutti n hanno per somma $2n$. Quindi la somma dei numeri della tabella è la stessa di quella che si ottiene con una tabella formata da tutti numeri uguali ad n, cioè $n \cdot n^2 = n^3$.

19) La risposta è **(D)**.
Consideriamo i triangoli ADE e BEF. Essi sono uguali poiché $DE = EF$, $D\widehat{A}E = E\widehat{B}F$, $B\widehat{E}F = 180° - 90° - 60° = 30° = A\widehat{D}E$.
Ne segue $AB = AE + EB = AE + AD = AE + 2 \cdot AE = 3 \cdot AE$ e di conseguenza

$$AB = 3 \cdot AE = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot DE = \sqrt{3} \cdot DE$$

e dunque il rapporto fra le aree dei due triangoli è 3.

20) La risposta è **(C)**.
Si ha $(123456789)^6 = (\alpha \cdot 10^8)^6 = \alpha^6 \cdot 10^{48}$, ove $\alpha = 1,23\ldots$; quindi $\alpha^2 < 2$, $\alpha^6 < 8$: pertanto il numero delle cifre è lo stesso di 10^{48}, cioè 49.

21) La risposta è **(D)**.
Infatti gli angoli interni di un poligono regolare di n lati valgono $\dfrac{n-2}{n}180°$, nel caso del pentagono si ha dunque $E\hat{A}B = \dfrac{3}{5}180° = 108°$. Pertanto $E\hat{A}C = 108° - 60° = 48°$. Siccome il triangolo EAC è isoscele, l'angolo $E\hat{C}A$ vale $\dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$. Parimenti, per simmetria, si avrà $B\hat{C}D = 66°$ e, concludendo,

$$E\hat{C}D = 360° - E\hat{C}A - A\hat{C}B - B\hat{C}D = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°.$$

22) La risposta è **(D)**.
Infatti per determinare il vincitore assoluto è necessario eliminare 255 concorrenti. Poiché ad ogni turno vengono eliminati 3 concorrenti, la risposta è $\frac{255}{3} = 85$.

23) La risposta è **(C)**.
Infatti, se $\dfrac{a}{b} < 100$ e $b < 100$ necessariamente si deve avere $a < 100 \cdot b < 10\,000$ e dunque le frazioni $\dfrac{a}{b}$ che verificano le condizioni richieste sono necessariamente meno di $100 \cdot 10\,000 = 1\,000\,000$.
Non è difficile mostrare che in tutti gli altri casi si hanno infinite frazioni: per il caso **(A)** le frazioni $\dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ verificano le condizioni richieste; per il caso **(B)** si pensi alle frazioni del tipo $100n + \dfrac{1}{101}$, ovvero $\dfrac{10100n+1}{101}$; per il caso **(D)** a $\dfrac{100+n}{2n} = \dfrac{50}{n} + \dfrac{1}{2}$ e per il caso **(E)** a $\dfrac{100+n}{1}$.

24) La risposta è **(D)**.
Infatti, utilizzando solo le cifre 1 posso costruire i 5 numeri 1, 11, 111, 1111, 11111. Utilizzando anche la cifra 2, posso costruire: un numero con una cifra (2), due numeri con due cifre (mettendo la cifra 2 al primo o al secondo posto), tre numeri di tre cifre, e così via, per un totale di $5 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 26$ numeri.

25) La risposta è **(C)**.
Chiamiamo R il raggio del semicerchio iniziale, ovviamente il primo cerchio tagliato ha raggio $R/2$. Se r è il raggio di uno degli ulteriori cerchi, si ha, dal teorema di Pitagora,

$$(C'N)^2 = (C'C)^2 - (CN)^2 = (C'O)^2 - (C'M)^2$$

cioè

$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = (R - r)^2 - r^2$$

da cui si ricava $r = \dfrac{R}{4}$. Dunque l'area complessiva dei tre dischi tagliati è:

$$\pi\frac{R^2}{4} + 2\pi\frac{R^2}{16}$$

e dunque il rapporto con l'area del semicerchio iniziale, che vale $\dfrac{\pi R^2}{2}$, è $\dfrac{3}{4}$. Pertanto $\dfrac{1}{4}$ del cartoncino viene sprecato.