Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2010-2011

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

Alunno: ____ Classe: 2 C

10.03.2011
prof. Mimmo Corrado

Dato il triangolo di vertici: $A\ (6; -3)$, $B\ (-2;\ 1)$, $C\ (4;\ 7)$, *determina:*

1. *il perimetro*
2. *l'area*
3. *le coordinate del baricentro G*
4. *le coordinate dell'ortocentro F*
5. *le coordinate del circocentro E*
6. *l'equazione della retta passante per i punti G, F, E (dopo aver verificato che sono allineati)*
7. *il quarto vertice del parallelogramma, i cui primi tre vertici sono i punti A , B e C*
8. *il triangolo simmetrico del triangolo ABC rispetto alla bisettrice del II° e IV° quadrante.*

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8
Punti	12	12	15	15	15	10	8 + 3	10

Voto	Punteggio grezzo / 10

Soluzione

1. Perimetro

Il perimetro è dato dalla somma dei tre lati:

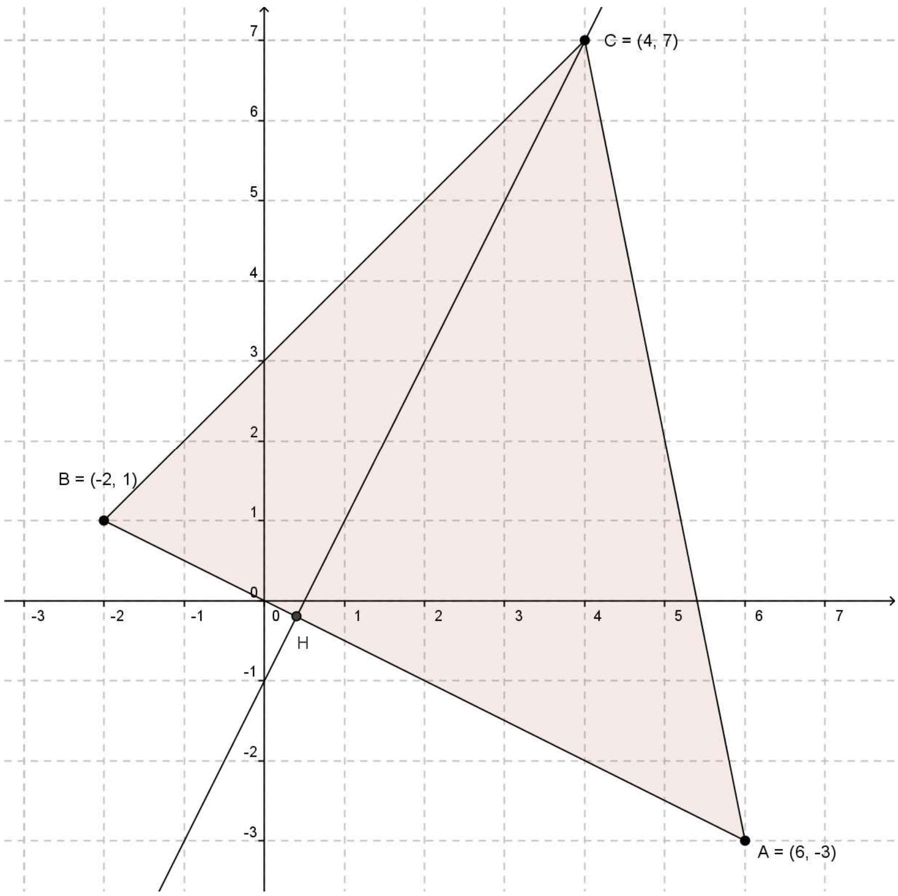
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(6+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ u$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\ u$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(6-4)^2 + (-3-7)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}\ u$$

Pertanto il perimetro del triangolo è:

$$2p = AB + BC + AC = \left(4\sqrt{5} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{26}\right)\ u \quad = \quad 2\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{26}\right)\ u$$



2. Area

<u>Metodo 1</u>

Per il calcolo dell'area del triangolo occorre determinare la misura dell'altezza CH.

Per calcolare la misura dell'altezza CH è necessario conoscere le coordinate del punto H.

Il punto H è il punto di intersezione delle due rette AB e CH.

Calcoliamo pertanto le equazioni delle rette AB e CH.

L'equazione della retta AB è data da:

$$\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{x-x_B}{x_A-x_B}\ ; \qquad \frac{y+3}{1+3}=\frac{x-6}{-2-6}\ ; \qquad \frac{y+3}{4}=\frac{x-6}{-8}\ ; \qquad y=-\frac{1}{2}x$$

il cui coefficiente angolare $m_{AB}=-\frac{1}{2}$

La retta CH perpendicolare alla retta AB ha coefficiente angolare: $m_{CH}=-\frac{1}{m_{AB}}=2$

ed equazione: $y-y_C=m_{CH}\,(x-x_C)\ ; \qquad y-7=2\,(x-4)\ ; \qquad y=2x-1$

Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette AB e CH:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-\frac{1}{2}x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad H\left(\frac{2}{5};\,-\frac{1}{5}\right)$$

Calcoliamo la misura dell'altezza CH:

$$CH=\sqrt{(x_C-x_H)^2+(y_C-y_H)^2}=\sqrt{\left(4-\frac{2}{5}\right)^2+\left(7+\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{324}{25}+\frac{1296}{25}}=\sqrt{\frac{1620}{25}}=\frac{18}{5}\sqrt{5}\ u$$

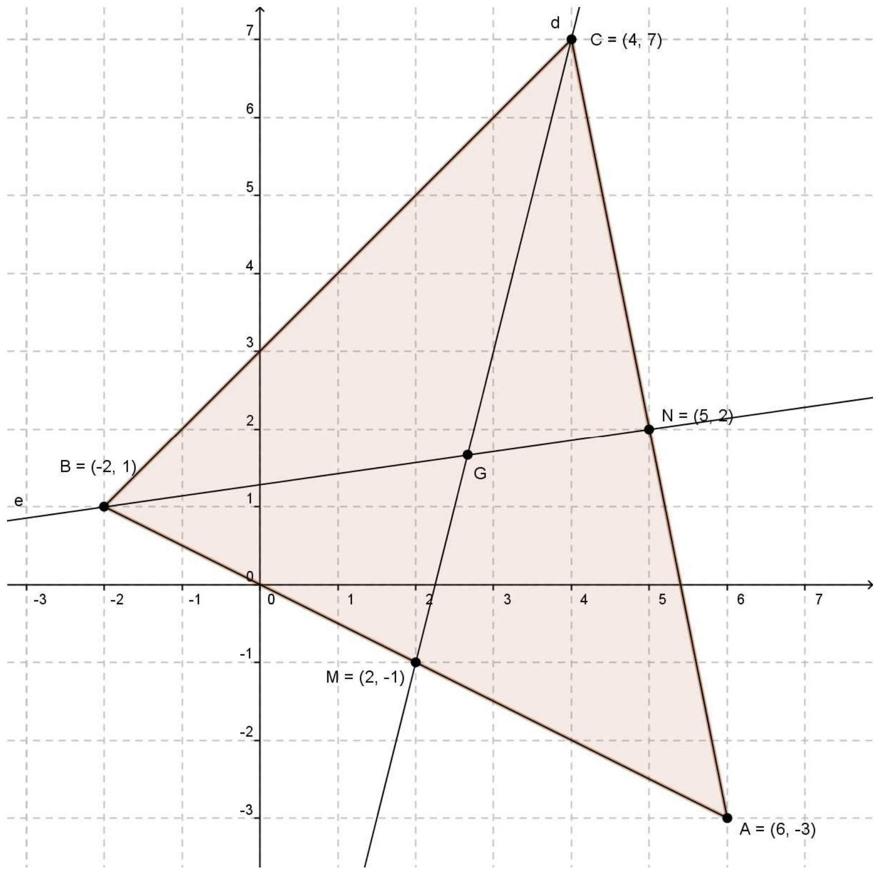
In definitiva l'area del triangolo è: $S=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}4\sqrt{5}\cdot\frac{18}{5}\sqrt{5}=36\,u^2$

<u>Metodo 2</u>

L'area del triangolo può essere calcolata anche con la formula:

$$S=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_C-x_A & y_C-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4-6 & 7+3 \\ -2-6 & 1+3 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot(-8+80)=36\,u^2$$

3. Il baricentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre mediane.



Determiniamo le coordinate del punto medio M del lato AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad M\,(2;1)$$

Determiniamo l'equazione della mediana CM:

$$\frac{y - y_M}{y_C - y_M} = \frac{x - x_M}{x_C - x_M} \;; \qquad \frac{y+1}{7+1} = \frac{x-2}{4-2} \;; \qquad \frac{y+1}{8} = \frac{x-2}{2} \;; \qquad y = 4x - 9$$

Determiniamo le coordinate del punto medio N del lato AC:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$
$$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad N\,(5;2)$$

Determiniamo l'equazione della mediana BN:

$$\frac{y - y_N}{y_B - y_N} = \frac{x - x_N}{x_B - x_N} \;; \qquad \frac{y-2}{1-2} = \frac{x-5}{-2-5} \;; \qquad \frac{y-2}{-1} = \frac{x-5}{-7} \;; \qquad y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7}$$

Determiniamo le coordinate del baricentro G, punto di incontro delle due mediane CM e BN:

$$\begin{cases} y = 4x - 9 \\ y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7} \end{cases}$$

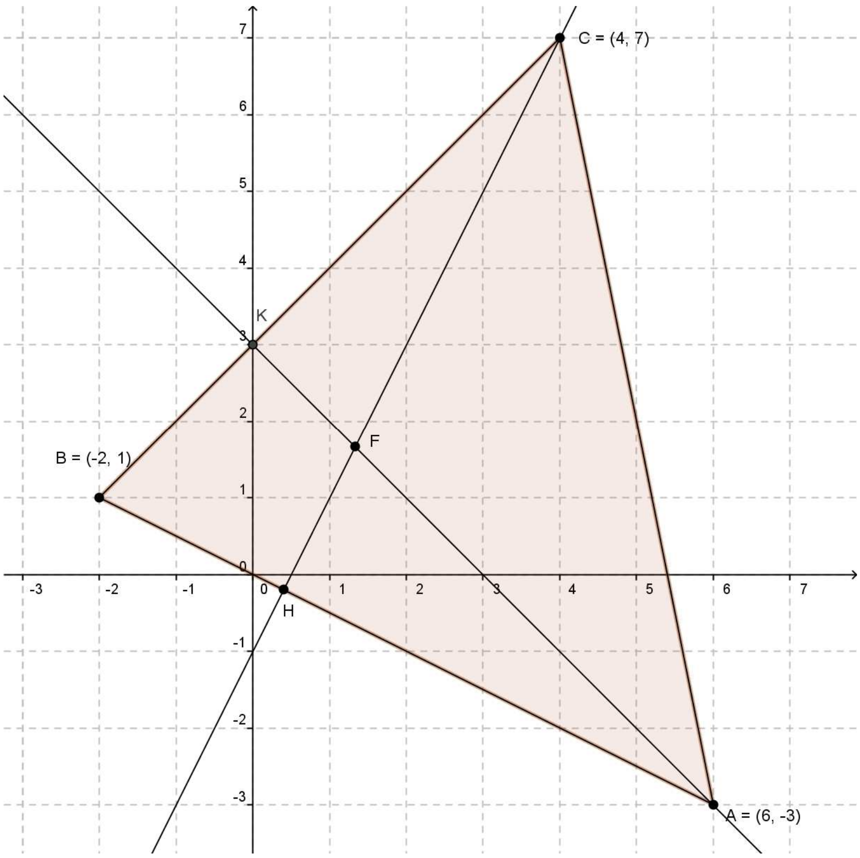
Pertanto, il baricentro ha coordinate: $G\left(\frac{8}{3};\, \frac{5}{3}\right)$

Soluzione 2

Le coordinate del baricentro possono essere calcolate anche con le formule:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{6 - 2 + 4}{3} = \frac{8}{3}$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-3 + 1 + 7}{3} = \frac{5}{3}$$

4. L'ortocentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre altezze.



L'equazione della retta CH è già stata determinata in precedenza: $y = 2x - 1$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta BC:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1 - 7}{-2 - 4} = 1$$

La retta AK perpendicolare alla retta BC ha coefficiente angolare: $m_{AK} = -\frac{1}{m_{BC}} = -1$

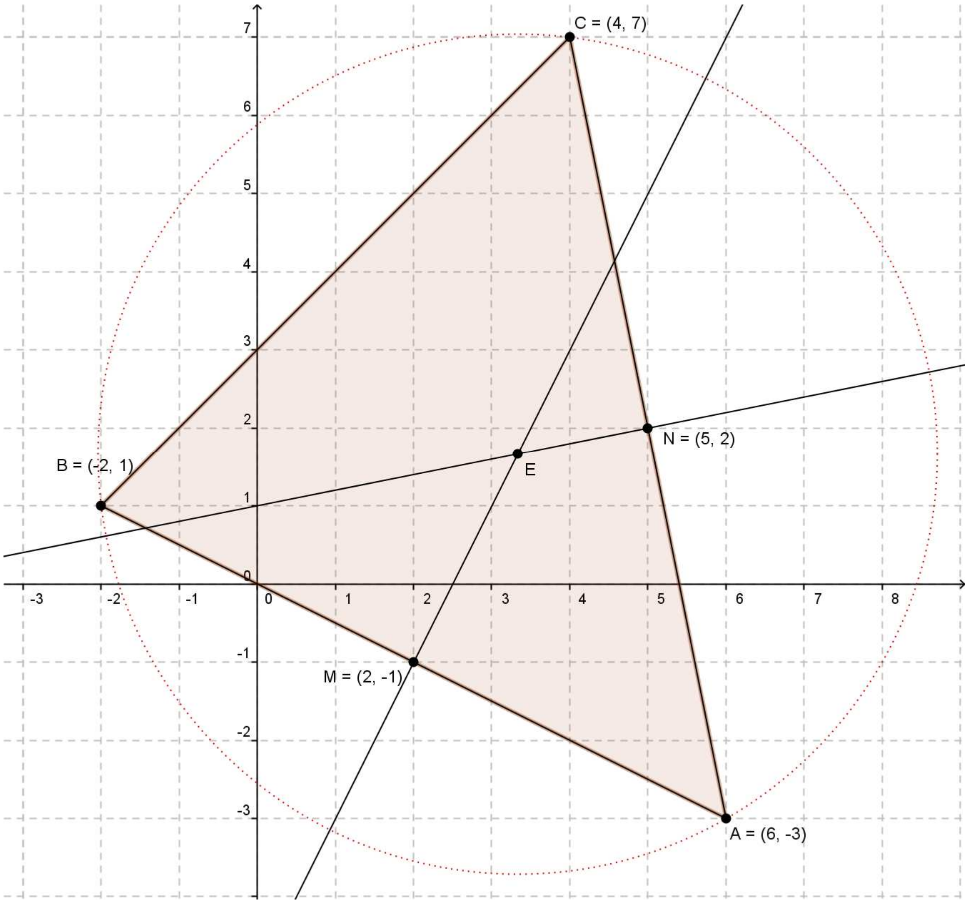
ed equazione: $y - y_A = m_{AK}\,(x - x_A)$; $y + 3 = -1\,(x - 6)$; $y = -x + 3$

Determiniamo le coordinate dell'ortocentro F, punto di incontro delle due altezze CH e AK:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Pertanto, l'ortocentro ha coordinate: $F\left(\frac{4}{3};\ \frac{5}{3}\right)$

5. Il circocentro di un triangolo è il punto d'incontro dei tre assi.



Il coefficiente angolare della retta AB è già stato determinato in precedenza: $m_{AB} = -\frac{1}{2}$

L'equazione dell'asse del segmento AB è:

$$y - y_M = -\frac{1}{m_{AB}}\,(x - x_M)\,; \qquad y + 1 = 2\,(x - 2)\,; \qquad y = 2x - 5$$

Il coefficiente angolare della retta AC è:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-3-7}{6-4} = \frac{-10}{2} = -5$$

L'equazione dell'asse del segmento AC è:

$$y - y_N = -\frac{1}{m_{AC}}\,(x - x_N)\,; \qquad y - 2 = \frac{1}{5}\,(x - 5)\,; \qquad y = \frac{1}{5}x + 1$$

Determiniamo le coordinate del circocentro E, punto di incontro dei due assi:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = \frac{1}{5}x + 1 \end{cases}$$

Pertanto, il circocentro ha coordinate: $E\left(\frac{10}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

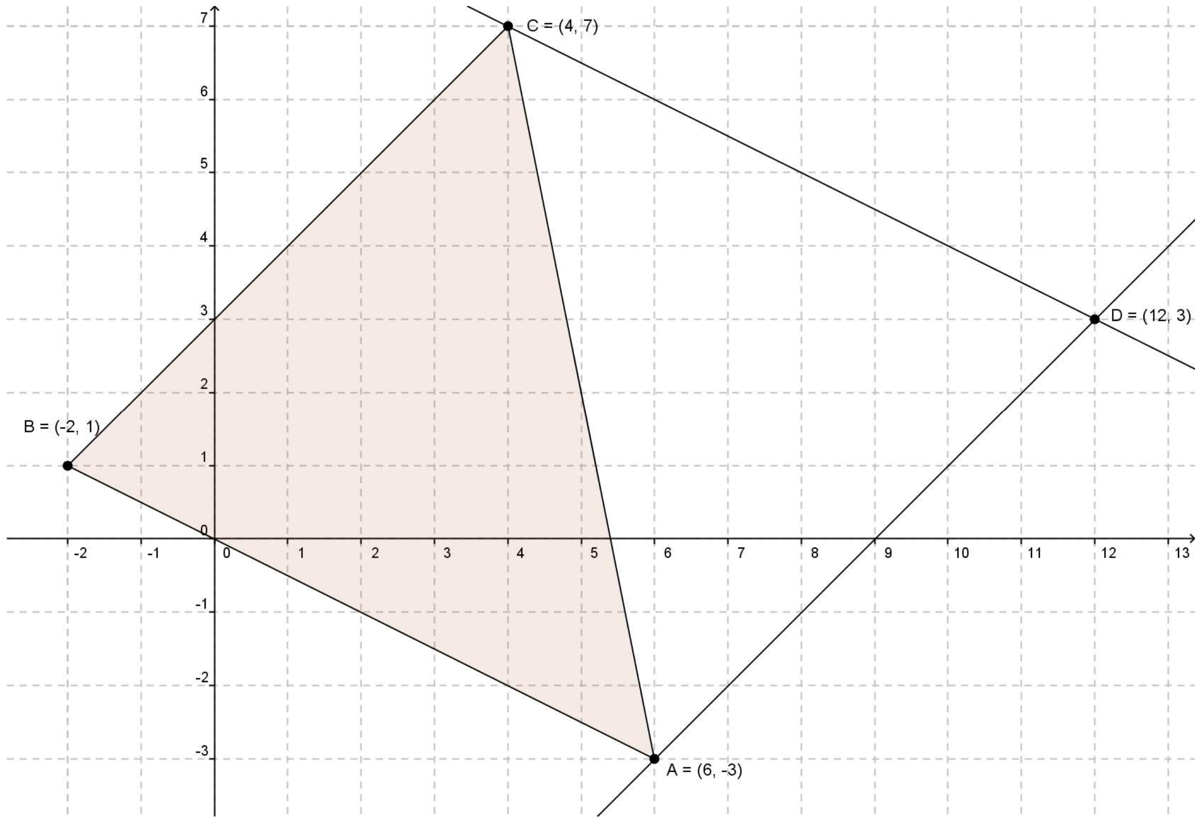
6. I punti G, E e F sono allineati infatti hanno tutti la stessa ordinata.

L'equazione della retta passante per G, F e E è: $y = \frac{5}{3}$.

7. Il quarto vertice del parallelogramma ha coordinate: $D\ (12; 3)$

Metodo 1:

$x_D + x_B = x_A + x_C \qquad x_D - 2 = 6 + 4 \qquad x_D = 12$
$y_D + y_B = y_A + y_C \qquad y_D + 1 = -3 + 7 \qquad y_D = 3$



Metodo 2:

Il quarto vertice D del parallelogramma è il punto di incontro delle rette AD e CD.

La retta AD non è altro che la retta passante per il punto A (6; -3) e parallela alla retta BC.

Il coefficiente angolare della retta BC è già stato determinato in precedenza: $m_{BC} = 1$.

La retta AD ha equazione: $y - y_A = m_{BC}\,(x - x_A)\,;\qquad y + 3 = 1\,(x - 6)\,;\qquad y = x - 9$

La retta CD non è altro che la retta passante per il punto C (4; 7) e parallela alla retta AB.

Il coefficiente angolare della retta AB è già stato determinato in precedenza: $m_{AB} = -\frac{1}{2}$.

La retta CD ha equazione: $y - y_C = m_{AB}\,(x - x_C)\,;\qquad y - 7 = -\frac{1}{2}\,(x - 4)\,;\qquad y = -\frac{1}{2}x + 9$

Le coordinate del quarto vertice del parallelogramma sono date da:

$\begin{cases} y = x - 9 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 9 = -\dfrac{1}{2}x + 9 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 18 = -x + 18 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 12 \\ y = 12 - 9 = 3 \end{cases}$

8. Il triangolo simmetrico rispetto alla bisettrice del II° e IV° quadrante si ottiene utilizzando le equazioni: $\begin{cases} x^I = -y \\ y^I = -x \end{cases}$