# *Liceo Scientifico G. Galilei di Trebisacce*
*Anno Scolastico 2010-2011*

MATEMATICA : Radicali

18.11.2010
*prof. Mimmo Corrado*

Alunno: ________________________________________ Classe: 2 C

1. *Dati i seguenti numeri, individua quelli irrazionali:* $3{,}050050005\ldots;\ \frac{7}{11};\ 5{,}4\overline{52};\ \pi;\ \sqrt{0{,}25};\ \sqrt{3{,}6};\ -\sqrt{\frac{1}{9}}$
2. *Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale* $\sqrt{34}$ .
3. *Scrivi un numero irrazionale compreso fra* $3{,}5$ *e* $3{,}6$ .
4. *Scrivi i primi cinque termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero reale:* $\sqrt{7}$ .
5. *Calcola il valore approssimato a meno di un millesimo di* $\sqrt{7}$ .
6. *Semplifica i seguenti radicali, supponendo verificate le condizioni di esistenza:*
   $\sqrt{16a^4b^2}$ $\qquad \sqrt{x^2-y^2}$ $\qquad \sqrt[6]{a^3b^3-9a^2b^2+27ab-27}$ $\qquad \sqrt[4]{x^2+4a^2+4ax}$
7. *Supponendo verificate le condizioni di esistenza, trasporta, se possibile, uno o più fattori fuori dal segno di radice:*
   $\sqrt[4]{32x^3y^6z^8}$ $\qquad \sqrt{x^3-8y^3-6x^2y+12xy^2}$ $\qquad \sqrt{(x+1)\cdot(x^2+4x+3)}$
8. *Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni :*
   $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ $\qquad \frac{6}{\sqrt[7]{8}}$ $\qquad \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ $\qquad \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$
9. *Trasforma il seguente radicale doppio in una somma di radicali semplici:*
   $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$
10. *Semplifica i seguenti radicali, supponendo verificate le condizioni di esistenza:*
    $3\sqrt{18}-2\sqrt{8}+5\sqrt{12}-6\sqrt{32}-4\sqrt{48}$ $\qquad \sqrt{x+1}+\sqrt{4x+4}-\sqrt{9x+9}$
    $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}:\sqrt[4]{\frac{x-2}{x-1}}$ $\qquad (1-2\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-5)^2$
11. *Verifica che il triangolo i cui lati misurano* $\sqrt{10}\ cm$, $\sqrt{17+2\sqrt{10}}\ cm$, $(\sqrt{5}+\sqrt{2})cm$ *è un triangolo rettangolo.*
12. *Dimostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia* $5$ .

Valutazione

| Esercizio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punti | 3 | 6 | 4 | 5 | 3 | 3+2+4+4 | 3+4+5 | 4+4+4+5 | 5 | 5+5+5+5 | 6 | 6 |

| Voto | Punteggio grezzo / 10 |
|---|---|

# Soluzione

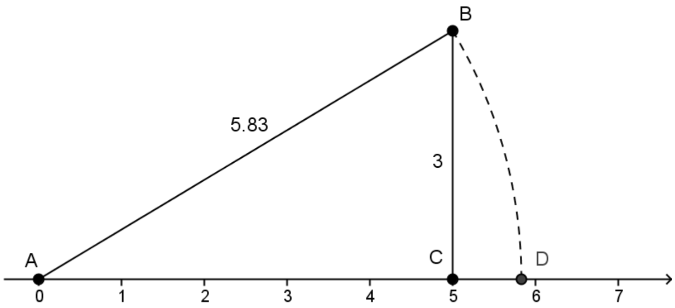
1. *Dati i seguenti numeri, individua quelli irrazionali:* $3{,}050050005\ldots$; $\frac{7}{11}$; $5{,}4\overline{52}$; $\pi$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{3{,}6}$ .

   <u>*Soluzione*</u>

   $3{,}050050005\ldots$;  $\pi$;  $\sqrt{3{,}6}$

2. *Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale* $\sqrt{34}$ .

   <u>*Soluzione*</u>




3. *Scrivi un numero irrazionale compreso fra* $3{,}5$ *e* $3{,}6$ .

   <u>*Soluzione*</u>

   $3{,}512122122212222\ldots$

4. *Scrivi i primi cinque termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero reale* $\sqrt{7}$ .

   <u>*Soluzione*</u>

$$D = \{2,\ 2{,}6,\ 2{,}64,\ 2{,}645,\ 2{,}6457,\ldots\}$$
$$E = \{3,\ 2{,}7,\ 2{,}65,\ 2{,}646,\ 2{,}6458,\ldots\}$$

5. *Calcola il valore approssimato a meno di un millesimo di* $\sqrt{7}$ .

   <u>*Soluzione*</u>

   $\sqrt{7} \approx 2{,}646$ .

6. *Semplifica i seguenti radicali, supponendo verificate le condizioni di esistenza:*

$$\sqrt{16a^4b^2} = 4a^2|b|$$

$\sqrt{x^2 - y^2}$ *radicale irriducibile*

$$\sqrt[6]{a^3b^3 - 9a^2b^2 + 27ab - 27} = \sqrt[6]{(ab-3)^3} = \sqrt{ab-3}$$

$$\sqrt[4]{x^2 + 4a^2 + 4ax} = \sqrt[4]{(x+2a)^2} = \sqrt{|x+2a|}$$

7. *Supponendo verificate le condizioni di esistenza, trasporta, se possibile, uno o più fattori fuori dal segno di radice:*

$$\sqrt[4]{32x^3y^6z^8} = \sqrt[4]{2^5x^3y^6z^8} = 2|y|z^2\sqrt[4]{2x^3y^2}$$

$$\sqrt{x^3-8y^3-6x^2y+12xy^2} = \sqrt{(x-2y)^3} = (x-2y)\sqrt{x-2y}$$

$$\sqrt{(x+1)\cdot(x^2+4x+3)} = \sqrt{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)} = \sqrt{(x+1)^2\cdot(x+3)} = |x+1|\sqrt{x+3}$$

8. *Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni :*

$$\frac{5}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{6}{\sqrt[7]{8}} = \frac{6}{\sqrt[7]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{6\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{6\sqrt[7]{16}}{2} = 3\sqrt[7]{16}$$

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{7-2} = \frac{5\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{5} = \sqrt{7}+\sqrt{2}$$

$$\frac{x-5}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}} = \frac{(x-5)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3} = \frac{(x-5)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{x-5} =$$

$$= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}\ .$$

9. *Trasforma il seguente radicale doppio in una somma di radicali semplici:*

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{7+\sqrt{4\cdot 6}} = \sqrt{7+\sqrt{24}}\ .$$

*Essendo* $a^2-b=7^2-24=25$ *un quadrato perfetto conviene sviluppare il radicale con la formula:*

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{25}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{25}}{2}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}}+\sqrt{\frac{7-5}{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{6}+1$$

10. *Semplifica le seguenti espressioni irrazionali, supponendo verificate le condizioni di esistenza:*

$$3\sqrt{18}-2\sqrt{8}+5\sqrt{12}-6\sqrt{32}-4\sqrt{48}$$

$$=3\cdot 3\sqrt{2}-2\cdot 2\sqrt{2}+5\cdot 2\sqrt{3}-6\cdot 4\sqrt{2}-4\cdot 4\sqrt{3} =$$

$$=9\sqrt{2}-4\sqrt{2}+10\sqrt{3}-24\sqrt{2}-16\sqrt{3} =$$

$$=-19\sqrt{2}-6\sqrt{3}\ .$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+4}-\sqrt{9x+9}=$$

$$=\sqrt{x+1}+\sqrt{4\cdot(x+1)}-\sqrt{9\cdot(x+1)}=$$

$$=\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}-3\sqrt{x+1}=0$$

$$\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}:\sqrt[4]{\frac{x-2}{x-1}}=$$

$$=\sqrt[12]{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^6}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{(x-2)^6}{(x-1)^6}\cdot\frac{(x-1)^4}{(x-2)^4}\cdot\frac{(x-1)^3}{(x-2)^3}}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$\left(1-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)^2=$$

$$=1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\cdot 3-\left(3+25-10\sqrt{3}\right)=$$

$$=1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}-6-3-25+10\sqrt{3}=$$

$$-33+9\sqrt{3}\quad .$$

11. *Verifica che il triangolo i cui lati misurano* $\sqrt{10}\ cm$, $\sqrt{17+2\sqrt{10}}\ cm$, $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)cm$ *è un triangolo rettangolo.*

<u>*Soluzione*</u>

*Dei tre lati il maggiore è* $\sqrt{17+2\sqrt{10}}$.

*Occorre quindi verificare, per il Teorema di Pitagora, che la somma dei quadrati dei lati più corti (cateti) è uguale al quadrato del lato più lungo (ipotenusa).*

$$\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{17+2\sqrt{10}}\right)^2;\qquad 10+5+2+2\sqrt{10}=17+2\sqrt{10};\qquad 17+2\sqrt{10}=17+2\sqrt{10}.$$

*c.v.d.*

*12. Dimostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia* $5$ *.*

Dimostrazione

*Supponiamo per assurdo che esista un n° razionale* $\frac{a}{b}$ *tale che:* $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$ *con* $a, b \in N$ *e* $a$ *e* $b$ *primi tra loro.*

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = 5$ ; *(*)* $a^2 = 5 \cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2$ *è multiplo di 5* $\Rightarrow$ $a$ *è multiplo di 5 .*

*Se* $a$ *è multiplo di 5 si può scrivere:* $a = 5 \cdot k$ *.*

*Sostituendo tale espressione nell'equazione (*) si ottiene:*

$(5k)^2 = 5 \cdot b^2$ ; $25k^2 = 5 \cdot b^2$ ; $5k^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2$ *è multiplo di 5* $\Rightarrow$ $b$ *è multiplo di 5 e si può scrivere:* $b = 5 \cdot h$ *.*

*Pertanto si ha:* $\frac{a}{b} = \frac{5k}{5h}$ *e ciò è un assurdo, perché per ipotesi* $a$ *e* $b$ *erano primi tra loro, invece in questa eguaglianza sono entrambi divisibili per 5.*