Liceo Scientifico G. Galilei di Trebisacce
Anno Scolastico 2010-2011

MATEMATICA : Equazioni di II° grado

16.12.2010
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 2 C

1. *Risolvi le seguenti equazioni:*

$(2x+7)^2 = 15 - (x+2)(x-3)$

$2x^2 + 2x + 5 = 0$
Trova le soluzioni complesse

$$\frac{x+1}{3x-3x^2} + \frac{7}{6x} = \frac{x-1}{2x+2x^2}$$

2. *Nella seguente equazione parametrica di II° grado:* $(m-1)x^2 - 2(m+3)x + m - 2 = 0$ *determina per quali valori del parametro:*
   a. *le due radici sono reali e distinte*
   b. *le due radici sono reali e coincidenti*
   c. *le due radici sono opposte*
   d. *la somma delle radici è 10*
   e. *il prodotto delle radici è 3*
   f. *le due radici sono l'una il reciproco dell'altra*
   g. *le due radici sono l'una l'opposto del reciproco dell'altra*
   h. *una radice è uguale a 2*

3. *Risolvi e discuti la seguente equazione letterale:* $ax^2 + ax - 3x - x^2 - 2a - 2 = 0$

4. *Calcola nell'insieme dei numeri complessi il valore delle seguenti espressioni:*

$$\frac{(1-i)^2 + 2i + 2}{(2+i)(2-i)} + \frac{3}{5} - (2i)^3$$

$$\frac{i+3}{3-i} + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, i\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \cdot i^{325}$$

5. *Trova le età di due sorelle sapendo che due anni fa l'età della maggiore era doppia di quella della minore e che fra tre anni il prodotto delle loro età sarà i* $\frac{39}{4}$ *della somma delle età attuali.*

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5
Punti	6 + 5 + 8	21	20	10 + 10	20

Voto	Punteggio grezzo / 10

Soluzione

1. *Risolvi le seguenti equazioni:*

$(2x+7)^2 = 15-(x+2)(x-3)\,;$

$(2x+7)^2 = 15-(x+2)(x-3)$

$4x^2+49+28x = 15-x^2+x+6\,;$

$5x^2+27x+28=0\,;$

$$x_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{729-560}}{2\cdot 5} = \frac{-27\pm\sqrt{169}}{10} = \frac{-27\pm 13}{10} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-27-13}{10} = \dfrac{-40}{10} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-27+13}{10} = \dfrac{-14}{10} = -\dfrac{7}{5} \end{array}$$

$\dfrac{x+1}{3x-3x^2} + \dfrac{7}{6x} = \dfrac{x-1}{2x+2x^2}$

$\dfrac{x+1}{3x\cdot(1-x)} + \dfrac{7}{6x} = \dfrac{x-1}{2x\cdot(1+x)}$

Moltiplicando per il $m.c.m. = 6x(1-x)(1+x) \neq 0\,;\quad x\neq 0\,;\ x\neq 1\,;\ x\neq -1\,.$

$2(1+x)^2+7(1-x)(1+x) = 3(1-x)(x-1)\,;$

$2(1+x^2+2x)+7(1-x^2) = 3(x-1-x^2+x)\,;$

$2+2x^2+4x+7-7x^2 = 3x-3-3x^2+3x\,;$

$2+2x^2+4x+7-7x^2-3x+3+3x^2-3x=0\,;$

$-2x^2-2x+12=0\,;$

$x^2+x-6=0\,;$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array}$$

Le due soluzioni : $x_1 = -3$ *e* $x_2 = 2$ *sono entrambe accettabili perché diverse da :* $0\,;\ -1\,;\ +1\,.$

$2x^2+2x+5=0\,;$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-2\cdot 5}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-9}}{2} = \frac{-1\pm 3i}{2} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-3i}{2} = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i \\ x_2 = \dfrac{-1+3i}{2} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i \end{array}$$

2. *Nella seguente equazione parametrica di II° grado:* $(m-1)x^2-2(m+3)x+m-2=0$ *determinare per quali valori del parametro:*

   a. *le due radici sono reali e distinte*
   b. *le due radici sono reali e coincidenti*
   c. *le due radici sono opposte*
   d. *la somma delle radici è 10*
   e. *il prodotto delle radici è 3*
   f. *le due radici sono l'una il reciproco dell'altra*
   g. *le due radici sono l'una l'opposto del reciproco dell'altra*
   h. *una radice è uguale a 2*

$A=m-1\,; \quad B=-2(m+3)\,; \quad C=m-2$

a. $\frac{\Delta}{4}>0\,; \quad (m+3)^2-(m-1)(m-2)>0\,; \quad m^2+9+6m-m^2+2m+m-2>0\,; \quad 9m+7>0\,;$
$m>-\frac{7}{9}\,;$

b. $\frac{\Delta}{4}=0\,; \quad (m+3)^2-(m-1)(m-2)=0\,; \quad m^2+9+6m-m^2+2m+m-2=0\,;$

$9m+7=0\,; \quad m=-\frac{7}{9}\,;$

c. $b=0\,; \quad m+3=0\,; \quad m=-3$ *(valore non è accettabile perché non verifica la condizione* $\Delta\geq 0\,, \quad m\geq-\frac{7}{9}$ *).*

d. $x_1+x_2=10\,; \quad -\frac{b}{a}=10\,; \quad -\frac{-2(m+3)}{m-1}=10\,; \quad 2m+6=10m-10\,; \quad 8m=16\,; \quad m=2\,.$

e. $x_1\cdot x_2=3\,; \quad \frac{c}{a}=3\,; \quad \frac{m-2}{m-1}=3\,; \quad m-2=3m-3\,; \quad 2m=1\,; \quad m=\frac{1}{2}.$

f. $x_1=\frac{1}{x_2}\,; \quad x_1\cdot x_2=1\,; \quad \frac{c}{a}=1\,; \quad \frac{m-2}{m-1}=1; \quad m-2=m-1\,; \quad -2=-1\,;$ *equazione impossibile con* $m\neq 1$

g. $x_1=-\frac{1}{x_2}\,; \quad x_1\cdot x_2=-1; \quad \frac{c}{a}=-1\,; \quad \frac{m-2}{m-1}=-1\,; \quad m-2=-m+1\,; \quad 2m=3\,; \quad m=\frac{3}{2}.$

h. $(m-1)\cdot 2^2-2(m+3)\cdot 2+m-2=0\,; \quad (m-1)\cdot 4-2(m+3)\cdot 2+m-2=0\,;$

$4m-4-4m-12+m-2=0\,; \quad m=18\,.$

3. *Risolvi e discuti la seguente equazione letterale:* $ax^2 + ax - 3x - x^2 - 2a - 2 = 0$

$\boxed{(a-1)x^2 + (a-3)x - 2a - 2 = 0}$; $\quad A = a - 1$; $\quad B = a - 3$; $\quad C = -2a - 2$

$A = 0$; $a = 1 \;\Rightarrow\; -2x - 2 - 2 = 0$; $-2x = 4$; $x = -2$

$B = 0$; $a = 3 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 6 - 2 = 0$; $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; $x = \mp 2$

$C = 0$; $-2a - 2 = 0$; $a = -1 \;\Rightarrow\; -2x^2 - 4x = 0$; $2x^2 + 4x = 0$; $2x \cdot (x+2) = 0$; $\begin{matrix} x = 0 \\ x = -2 \end{matrix}$

$\Delta = (a-3)^2 - 4(a-1)(-2a-2) = a^2 + 9 - 6a - 4(-2a^2 - 2a + 2a + 2) = a^2 + 9 - 6a + 8a^2 - 8 =$

$= 9a^2 + 1 - 6a = (3a-1)^2$

$\Delta > 0$; $(3a-1)^2 > 0$; $3a - 1 \neq 0$; $a \neq \frac{1}{3}$.

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2A} = \frac{-(a-3) \pm \sqrt{(3a-1)^2}}{2(a-1)} = \frac{3 - a \pm (3a-1)}{2(a-1)} =$$

$$x_1 = \frac{3 - a - 3a + 1}{2(a-1)} = \frac{4 - 4a}{2(a-1)} = \frac{-4(a-1)}{2(a-1)} = -2$$
$$x_2 = \frac{3 - a + 3a - 1}{2(a-1)} = \frac{2 + 2a}{2(a-1)} = \frac{2(a+1)}{2(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$$

$\Delta = 0$; $(3a-1)^2 = 0$; $3a - 1 = 0$; $a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-\left(\frac{1}{3} - 3\right) \pm \sqrt{0}}{2\left(\frac{1}{3} - 1\right)} = \frac{\frac{8}{3}}{2\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2$

$\Delta < 0$; $(3a-1)^2 < 0$; $\not\forall a \in R$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 1$	*Equazione di I° grado*	$x = -2$
$a = 3$	*Equazione Pura*	$x = \mp 2$
$a = -1$	*Equazione Spuria*	$x = 0$ *e* $x = -2$
$a \neq \frac{1}{3}$ *e* $a \neq \mp 1$ *e* $a \neq 3$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = -2$ *e* $x_2 = \frac{a+1}{a-1}$
$a = \frac{1}{3}$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$x_{1,2} = -2$
Per nessun valore di a	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	

4. *Calcola nell'insieme dei numeri complessi il valore delle seguenti espressioni:*

$$\frac{(1-i)^2+2i+2}{(2+i)(2-i)}+\frac{3}{5}-(2i)^3=$$

$$=\frac{1+i^2-2i+2i+2}{4-i^2}+\frac{3}{5}-8(-i)=$$

$$=\frac{1-1+2}{4+1}+\frac{3}{5}+8i=$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+8i=$$

$$=\frac{2+3}{5}+8i=$$

$$=\frac{5}{5}+8i=$$

$$=1+8i\,.$$

$$\frac{i+3}{3-i}+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,i\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 i^{325}=$$

$$=\frac{i+3}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}+\frac{3}{5}i^2+\frac{2}{5}i^{324}\cdot i=$$

$$=\frac{i^2+9+6i}{9-i^2}-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}i=$$

$$=\frac{-1+9+6i}{9+1}-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}i=$$

$$=\frac{8+6i}{10}-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}i=$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}i=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{5}{5}i=$$

$$=\frac{1}{5}+i=$$

5. *Trova le età di due sorelle sapendo che due anni fa l'età della maggiore era doppia di quella della minore e che fra tre anni il prodotto delle loro età sarà i* $\frac{39}{4}$ *della somma delle età attuali.*

Soluzione

Poniamo:

l'età, di due anni fa, della sorella minore $= x$ $\Rightarrow$ *l'età, di due anni fa, della sorella maggiore* $= 2x$

Pertanto, oggi le età delle due sorelle sono, rispettivamente: $x + 2$ *e* $2x + 2$.

Mentre le età delle due sorelle fra tre anni saranno rispettivamente: $x + 2 + 3 = x + 5$ *e* $2x + 2 + 3 = 2x + 5$.

Si ottiene pertanto l'equazione risolvente il problema:

$(x + 5)(2x + 5) = \frac{39}{4}(x + 2 + 2x + 2)$;

$2x^2 + 5x + 10x + 25 = \frac{39}{4}(3x + 4)$;

$2x^2 + 15x + 25 = \frac{39}{4}(3x + 4)$;

$8x^2 + 60x + 100 = 39(3x + 4)$;

$8x^2 + 60x + 100 = 117x + 156$;

$8x^2 - 57x - 56 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{57 \mp \sqrt{3249 + 1792}}{2 \cdot 8} = \frac{57 \mp \sqrt{5041}}{16} = \frac{57 \mp 71}{16} \quad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{57 - 71}{16} = -\dfrac{14}{16} \quad \textit{non accettabile} \\ x_2 = \dfrac{57 + 71}{16} = \dfrac{128}{16} = 8 \end{array}$$

La soluzione accettabile $x = 8$ *ci fornisce l'età attuali delle due sorelle:*

Età attuale della sorella minore $= x + 2 = 8 + 2 = 10$ *anni* .

Età attuale della sorella maggiore $= 2x + 2 = 2 \cdot 8 + 2 = 18$ *anni* .