

Prova di Matematica: Piano Cartesiano - Retta

1. Dati i punti: $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(3; 6)$, determina:
 - a. il perimetro del triangolo ABC;
 - b. l'area del triangolo ABC;
 - c. le coordinate dell'ortocentro.

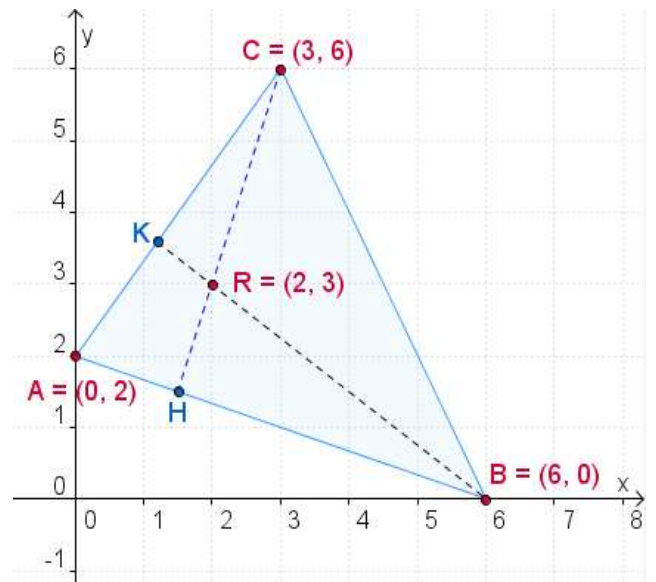
2. Traccia il grafico della funzione: $y = \sqrt{4x^2 - 24x + 36} - x$

3. Per fabbricare dei bulloni un'azienda ha la possibilità di utilizzare tre macchinari diversi:
 - il macchinario Azzurro richiede 10 minuti di preparazione e produce 6 bulloni al minuto;
 - il macchinario Verde richiede 8 minuti di preparazione e produce 4 bulloni al minuto;
 - il macchinario Rosso richiede 4 minuti di preparazione e produce 2 bulloni al minuto.Determina, in dipendenza del numero di bulloni che si vogliono produrre, quale macchinario consente di impiegare il minimo tempo complessivo.

Soluzione

1. Dati i punti: $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(3; 6)$, determina:

- il perimetro del triangolo ABC;
- l'area del triangolo ABC;
- le coordinate dell'ortocentro.



Soluzione a

Calcoliamo la misura del lato AB :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} .$$

Calcoliamo la misura del lato BC :

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} .$$

Calcoliamo la misura del lato AC :

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 .$$

La misura del perimetro è:

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{5} + 5 .$$

Soluzione b

Determiniamo l'equazione della retta passante per A e per B :

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B} ; \quad \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 6}{0 - 6} ; \quad \frac{y}{2} = \frac{x - 6}{-6} ; \quad 2 \cdot (x - 6) = -6y ;$$

$$2x - 12 = -6y ; \quad 6y = -2x + 12 ; \quad y = -\frac{1}{3}x + 2 .$$

Calcoliamo la misura dell'altezza CH :

$$\overline{CH} = \frac{|mx_C + q - y_C|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|-\frac{1}{3} \cdot 3 + 2 - 6|}{\sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{9}{10}} = 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{15}{\sqrt{10}} .$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{15}{\sqrt{10}} = 15 .$$

Soluzione c

Dalla soluzione **b**, $m_{AB} = -\frac{1}{3}$.

Essendo $CH \perp AB \Rightarrow m_{CH} = -\frac{1}{m_{AB}} = 3$.

Determiniamo l'equazione dell'altezza CH:

$$y - y_C = m_{CH} \cdot (x - x_C); \quad y - 6 = 3 \cdot (x - 3); \quad y - 6 = 3x - 9; \quad y = 3x - 3.$$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AC:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6 - 2}{3 - 0} = \frac{4}{3}.$$

Essendo $BK \perp AC \Rightarrow m_{BK} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{3}{4}$.

Determiniamo l'equazione dell'altezza BK:

$$y - y_B = m_{BK} \cdot (x - x_B); \quad y - 0 = -\frac{3}{4} \cdot (x - 6); \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}.$$

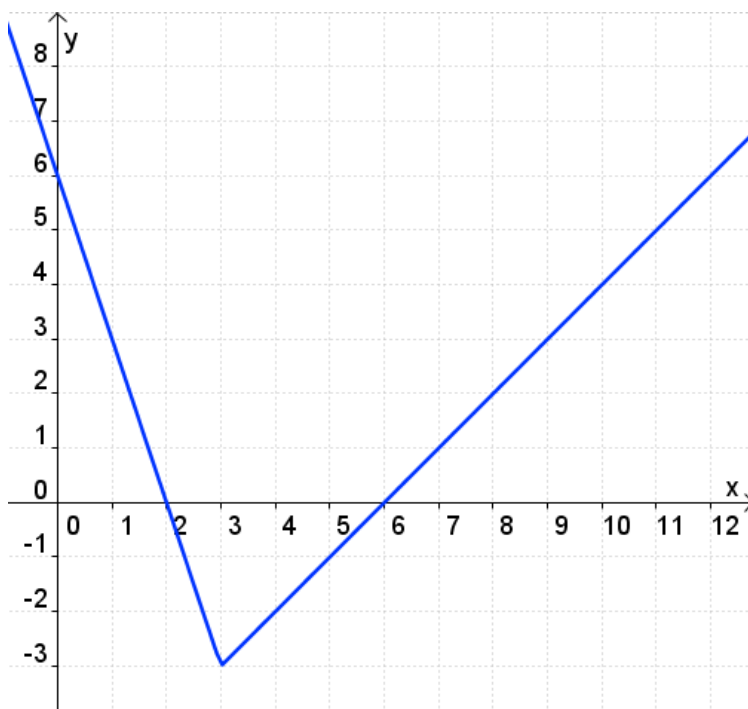
Determiniamo le coordinate dell'ortocentro:

$$R: \begin{cases} CH \\ BK \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 12x - 12 = -3x + 18 \\ - \\ - \end{cases}$$
$$\begin{cases} 15x = 30 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ y = 3 \cdot 2 - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow R(2; 3).$$

2. Traccia il grafico della funzione: $y = \sqrt{4x^2 - 24x + 36} - x$

$$y = \sqrt{4x^2 - 24x + 36} - x = \sqrt{(2x - 6)^2} - x = |2x - 6| - x = \begin{cases} +(2x - 6) - x & \text{se } 2x - 6 \geq 0 \\ -(2x - 6) - x & \text{se } 2x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} +x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -3x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$



3. Per fabbricare dei bulloni un'azienda ha la possibilità di utilizzare tre macchinari diversi:
 il macchinario Azzurro richiede 10 minuti di preparazione e produce 6 bulloni al minuto;
 il macchinario Verde richiede 8 minuti di preparazione e produce 4 bulloni al minuto;
 il macchinario Rosso richiede 4 minuti di preparazione e produce 2 bulloni al minuto.

Determina, in dipendenza del numero di bulloni che si vogliono produrre, quale macchinario consente di impiegare il minimo tempo complessivo.

Soluzione

Indichiamo con x il numero dei bulloni da fabbricare e con y il tempo di produzione. Con $x \in \mathbb{N}$.

Il tempo di produzione utilizzando il macchinario Azzurro è espresso dalla funzione lineare: $y = \frac{1}{6}x + 10$

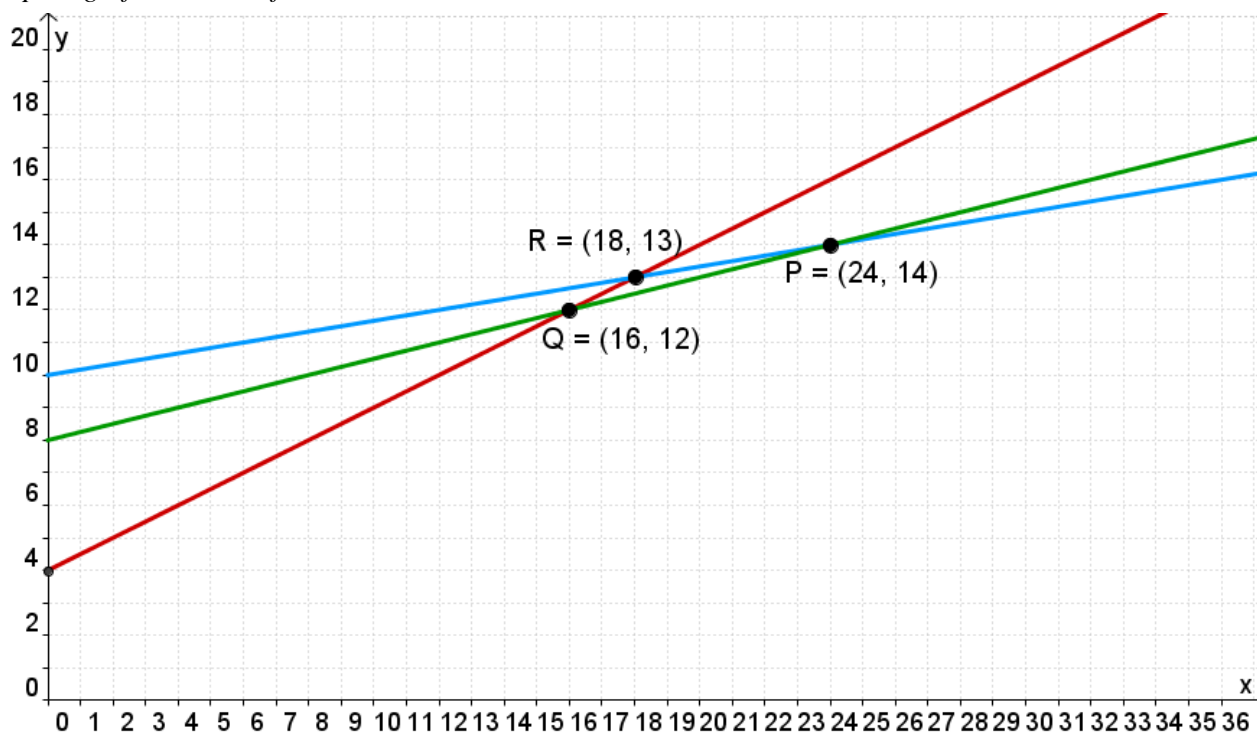
Il tempo di produzione utilizzando il macchinario Verde è espresso dalla funzione lineare: $y = \frac{1}{4}x + 8$

Il tempo di produzione utilizzando il macchinario Rosso è espresso dalla funzione lineare: $y = \frac{1}{2}x + 4$

Determiniamo i punti di intersezione fra le tre funzioni lineari:

$$\begin{array}{l}
 A \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{6}x + 10 \\ y = \frac{1}{4}x + 8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}x + 8 = \frac{1}{6}x + 10 \\ - \\ 3x + 96 = 2x + 120 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 24 \\ y = \frac{1}{4} \cdot 24 + 8 = 14 \end{array} \right. \Rightarrow P(24; 14) \\
 V \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + 8 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + 4 = \frac{1}{4}x + 8 \\ - \\ 2x + 16 = x + 32 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 16 \\ y = \frac{1}{2} \cdot 16 + 4 \end{array} \right. \Rightarrow Q(16; 12) \\
 A \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{6}x + 10 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + 4 = \frac{1}{6}x + 10 \\ - \\ 3x + 24 = x + 60 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = 36 \\ - \\ x = 18 \\ y = 13 \end{array} \right. \Rightarrow R(18; 13)
 \end{array}$$

Tracciamo poi i grafici delle tre funzioni lineari:



Dall'analisi dei grafici si ottiene:

- per meno di 16 bulloni conviene il macchinario Rosso;
- per una produzione tra i 16 e i 24 bulloni conviene il macchinario Verde;
- per una produzione per più di 24 bulloni conviene il macchinario Azzurro;
- per 16 bulloni è indifferente utilizzare il macchinario Rosso o il macchinario Verde;
- per 24 bulloni è indifferente utilizzare il macchinario Azzurro o il macchinario Verde.