

*Prova di Matematica : **Frazioni algebriche***

Alunno: _____ Classe: **1A** L. Scientifico **24 marzo 2023**

1. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{6x^2y - 12xy}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 24}{x^2 - 12x + 36}$$

$$\frac{2a^3 + 8a^2 + 32a}{2a^4 - 128a}$$

2. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{4x^2 - 1}{2x^2 + x} \cdot \frac{6x^2 - 7x - 3}{4x^2 - 8x + 3}$$

$$\frac{6x - 4y}{2a^3 - 3a^2 - 5a + 6} : \frac{9x - 6y}{4a^3 - 4a^2 - 9a + 9}$$

$$\frac{a+5}{a^2-1} + \frac{3}{2a-2} - \frac{a+4}{a^2-2a+1}$$

$$\left[\frac{1}{a^2-2a} + \left(\frac{a+3}{a-1} - \frac{a+3}{a^2-a} \right) : \frac{a^2+5a+6}{a+1} \right] \cdot \frac{1}{a}$$

3. Luca si reca in auto in una città che dista 250 km dalla sua abitazione. Durante i primi 150 km viaggia a una velocità media superiore di 20 km/h rispetto alla velocità media v (in km/h) tenuta negli ultimi 100 km. Esprimi il tempo totale (in ore) t per compiere il viaggio in funzione di v.

Soluzione

1. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{6x^2y - 12xy} = \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{6xy(x-2)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{6xy(x-2)} = \frac{\textcolor{red}{x-3}}{6y}. \quad C.E.: x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge y \neq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 24}{x^2 - 12x + 36} = \frac{(x+4)(x-6)}{(x-6)^2} = \frac{\textcolor{red}{x+4}}{\textcolor{red}{x-6}}. \quad C.E.: x \neq 6$$

$$\frac{2a^3 + 8a^2 + 32a}{2a^4 - 128a} = \frac{2a(a^2 + 4a + 16)}{2a(a^3 - 64)} = \frac{2a(a^2 + 4a + 16)}{2a(a-4)(a^2 + 4a + 16)} = \frac{1}{a-4}. \quad C.E.: a \neq 0 \wedge a \neq 4$$

2. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{4x^2 - 1}{2x^2 + x} \cdot \frac{6x^2 - 7x - 3}{4x^2 - 8x + 3} = \quad C.E.: x \neq 0 \wedge x \neq \pm\frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

Fattorizzo: $6x^2 - 7x - 3 = 6x^2 + 2x - 9x - 3 = 2x(3x+1) - 3(3x+1) = (3x+1)(2x-3)$.

Fattorizzo: $4x^2 - 8x + 3 = 4x^2 - 2x - 6x + 3 = 2x(2x-1) - 3(2x-1) = (2x-1)(2x-3)$.

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{x(2x+1)} \cdot \frac{(3x+1)(2x-3)}{(2x-1)(2x-3)} = \frac{\textcolor{red}{3x+1}}{x}.$$

$$\frac{6x - 4y}{2a^3 - 3a^2 - 5a + 6} : \frac{9x - 6y}{4a^3 - 4a^2 - 9a + 9} = \quad C.E.: a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq \mp\frac{3}{2} \wedge x \neq \frac{2}{3}y$$

Fattorizzo: $2a^3 - 3a^2 - 5a + 6$.

I divisori di 6 sono: $D_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$= (a-1) \cdot (2a^2 - a - 6) =$$

1	2	-3	-5	+6
	+2	-1	-6	
	2	-1	-6	0

Riapplicando la regola di Ruffini si ha:

$$= (a-1) \cdot (a-2)(2a+3)$$

2	2	-1	-6	
	+4	+6		
	2	+3	0	

Fattorizzo: $4a^3 - 4a^2 - 9a + 9 = 4a^2(a-1) - 9(a-1) = (a-1)(4a^2 - 9) = (a-1)(2a+3)(2a-3)$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(3x-2y)}{(a-1)(a-2)(2a+3)} : \frac{3(3x-2y)}{(a-1)(2a-3)(2a+3)} = \\
 &= \frac{2(3x-2y)}{(a-1)(a-2)(2a+3)} \cdot \frac{(a-1)(2a-3)(2a+3)}{3(3x-2y)} = \\
 &= \frac{\textcolor{red}{2(2a-3)}}{3(a-2)}.
 \end{aligned}$$

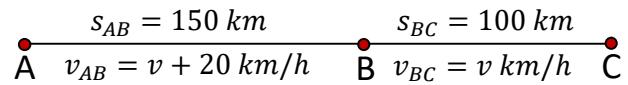
$$\begin{aligned}
& \frac{a+5}{a^2-1} + \frac{3}{2a-2} - \frac{a+4}{a^2-2a+1} = C.E.: a \neq \pm 1 \\
&= \frac{a+5}{(a+1)(a-1)} + \frac{3}{2(a-1)} - \frac{a+4}{(a-1)^2} \\
&= \frac{2(a-1)(a+5) + 3(a+1)(a-1) - 2(a+1) \cdot (a+4)}{2(a-1)^2(a+1)} = \\
&= \frac{2(a^2 + 5a - a - 5) + 3(a^2 - 1) - 2(a^2 + 4a + a + 4)}{2(a-1)^2(a+1)} = \\
&= \frac{2a^2 + 10a - 2a - 10 + 3a^2 - 3 - 2a^2 - 8a - 2a - 8}{2(a-1)^2(a+1)} = \\
&= \frac{3a^2 - 2a - 21}{2(a-1)^2(a+1)} = \\
&= \frac{(a-3)(3a+7)}{2(a-1)^2(a+1)} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{a^2-2a} + \left(\frac{a+3}{a-1} - \frac{a+3}{a^2-a} \right) : \frac{a^2+5a+6}{a+1} \right] \cdot \frac{1}{a} = C.E.: a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1 \wedge a \neq \pm 2 \wedge a \neq -3 \\
&= \left[\frac{1}{a(a-2)} + \left(\frac{a+3}{a-1} - \frac{a+3}{a(a-1)} \right) : \frac{(a+2)(a+3)}{a+1} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{1}{a(a-2)} + \left(\frac{a(a+3) - (a+3)}{a(a-1)} \right) : \frac{(a+2)(a+3)}{a+1} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{1}{a(a-2)} + \left(\frac{a^2 + 3a - a - 3}{a(a-1)} \right) : \frac{(a+2)(a+3)}{a+1} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{1}{a(a-2)} + \frac{a^2 + 2a - 3}{a(a-1)} : \frac{(a+2)(a+3)}{a+1} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{1}{a(a-2)} + \frac{(a-1)(a+3)}{a(a-1)} \cdot \frac{a+1}{(a+2)(a+3)} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{1}{a(a-2)} + \frac{a+1}{a(a+2)} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{a+2 + (a-2)(a+1)}{a(a-2)(a+2)} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \left[\frac{a+2 + a^2 - a - 2}{a(a-2)(a+2)} \right] \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \frac{a^2}{a(a-2)(a+2)} \cdot \frac{1}{a} = \\
&= \frac{1}{a^2-4} .
\end{aligned}$$

3. Luca si reca in auto in una città che dista 250 km dalla sua abitazione. Durante i primi 150 km viaggia a una velocità media superiore di 20 km/h rispetto alla velocità media v (in km/h) tenuta negli ultimi 100 km. Esprimi il tempo totale (in ore) t per compiere il viaggio in funzione di v .

Soluzione

Dalla relazione della velocità $velocità = \frac{spazio}{tempo}$



si ricava la relazione $tempo = \frac{spazio}{velocità}$.

Pertanto il tempo complessivo del viaggio, espresso in ore, è dato dalla somma dei tempi dei due percorsi :

$$t = \frac{s_{AB}}{v_{AB}} + \frac{s_{BC}}{v_{BC}} = \frac{150}{v+20} + \frac{100}{v} = \frac{150v + 100(v+20)}{v(v+20)} = \frac{150v + 100v + 2000}{v(v+20)} = \frac{250v + 2000}{v^2 + 20v}.$$

La velocità $v > 0$.