*Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce*
*Anno Scolastico 2020-2021*

Classe *2A Liceo Scientifico* *13 febbraio 2021*

*Prova di Matematica: Sistemi lineari*

**Traccia B**

| **1. Determina il grado dei seguenti sistemi** | |
|---|---|
| $\begin{cases} 3x^2 - y = 5 \\ 2y - 3x^2 = 6 \end{cases}$ | $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y \cdot (5 - x^2) = 0 \end{cases}$ |
| Sistema di ______ grado | Sistema di _____ grado |

| **2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema** | |
|---|---|
| $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3y - \frac{1}{3}x = 2 \end{cases}$ $(x = 3\,; y = 1)$ | $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y - 4x = 4 \end{cases}$ $(x = 1\,; y = 2)$ |
| SI NO | SI NO |

**3. Indica senza risolverli il tipo dei seguenti sistemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile):**

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} 2x - 5y - \frac{5}{3} = 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \end{cases}$ Sistema ______________ | $\begin{cases} y - 2x = \frac{1}{6} \\ 6x - 3y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$ Sistema ______________ | $\begin{cases} \frac{1}{3}y - 4x = 1 \\ 2x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{2} \end{cases}$ Sistema ______________ |
| $\frac{a}{a'} =$ $\frac{b}{b'} =$ $\frac{c}{c'} =$ | $\frac{a}{a'} =$ $\frac{b}{b'} =$ $\frac{c}{c'} =$ | $\frac{a}{a'} =$ $\frac{b}{b'} =$ $\frac{c}{c'} =$ |

**4. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni lineari con un metodo a tua scelta :**

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 3 + \frac{4}{3}y = 5 - \frac{2}{3}y \\ \frac{x-4}{4} + \frac{x-6}{6} = \frac{y+8}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z - y + 3x = 10 \\ 4z - y + 6x = 17 \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

**5. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :**

$$\begin{cases} (a+1)x + y = a - 1 \\ x + (1-a)y = a - 1 \end{cases}$$

**6. Un ciclista compie un viaggio: all'andata impiega $5^h\,36^m$ e al ritorno $5^h\,32^m$ . Sapendo che il percorso prevede $32\ km$ di tratti pianeggianti nei quali la sua velocità è di $16\ km/h$ , tratti in salita nei quali procede a $12\ km/h$ e tratti in discesa nei quali procede a $20\ km/h$ , quanto sono lunghi i tratti in salita e quelli in discesa del percorso di andata ?**

# Soluzione

| **1. Determina il grado dei seguenti sistemi** | |
|---|---|
| $\begin{cases} 3x^2 - y = 5 \\ 2y - 3x^2 = 6 \end{cases}$ | $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y \cdot (5 - x^2) = 0 \end{cases}$ |
| Sistema di **4° grado** | Sistema di **3° grado** |

| **2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema** | | | |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3y - \frac{1}{3}x = 2 \end{cases}$ | $(x = 3\,; y = 1)$ | $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y - 4x = 4 \end{cases}$ | $(x = 1\,; y = 2)$ |
| **SI** | **NO** | **SI** | **NO** |

**3. Indica senza risolverli il tipo dei seguenti sistemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile):**

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} 2x - 5y - \frac{5}{3} = 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \end{cases}$ Sistema **indeterminato** | $\begin{cases} y - 2x = \frac{1}{6} \\ 6x - 3y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$ Sistema **impossibile** | $\begin{cases} \frac{1}{3}y - 4x = 1 \\ 2x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{2} \end{cases}$ Sistema **determinato** |
| $\frac{a}{a'} = 10 \quad \frac{b}{b'} = 10 \quad \frac{c}{c'} = 10$ | $\frac{a}{a'} = -\frac{1}{3} \quad \frac{b}{b'} = -\frac{1}{3} \quad \frac{c}{c'} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{a}{a'} = -2 \quad \frac{b}{b'} = 2 \quad \frac{c}{c'} = 2$ |

**4. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni lineari con un metodo a tua scelta :**

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 3 + \frac{4}{3}y = 5 - \frac{2}{3}y \\ \frac{x-4}{4} + \frac{x-6}{6} = \frac{y+8}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 18 + 8y = 30 - 4y \\ 3 \cdot (x-4) + 2 \cdot (x-6) = 6 \cdot (y+8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 12y = 12 \\ 3x - 12 + 2x - 12 = 6y + 48 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 4y = 4 \\ 5x - 6y = 72 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 4y \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 5 \cdot (4 - 4y) - 6y = 72 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 20 - 20y - 6y = 72 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ -26y = 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 4(-2) = 12 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x = 12} \\ \mathbf{y = -2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 6x - y + 4z = 17 \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3x + 2z - 10 \\ - \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 6x - (3x + 2z - 10) + 4z = 17 \\ x + 2 \cdot (3x + 2z - 10) - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 6x - 3x - 2z + 10 + 4z = 17 \\ x + 6x + 4z - 20 - 2z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 3x + 2z = 7 \\ 7x + 2z = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}z \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ 7 \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}z\right) + 2z = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ \frac{49}{3} - \frac{14}{3}z + 2z = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ 49 - 14z + 6z = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ -8z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 10 = -3 \\ - \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = -3} \\ \mathbf{z = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

**5. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :**

$$\begin{cases}(a+1)x+y=a-1\\ x+(1-a)y=a-1\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}a+1 & 1\\ 1 & 1-a\end{vmatrix}=(a+1)\cdot(1-a)-1=a-a^2+1-a-1=-a^2$$

$$D_x=\begin{vmatrix}a-1 & 1\\ a-1 & 1-a\end{vmatrix}=(a-1)\cdot(1-a)-1\cdot(a-1)=a-a^2-1+a-a+1=-a^2+a=-a\cdot(a-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a+1 & a-1\\ 1 & a-1\end{vmatrix}=(a+1)\cdot(a-1)-1\cdot(a-1)=a^2-1-a+1=a^2-a=a\cdot(a-1)$$

$Se\ D\neq 0\ \ cioè\ \ -a^2\neq 0;$

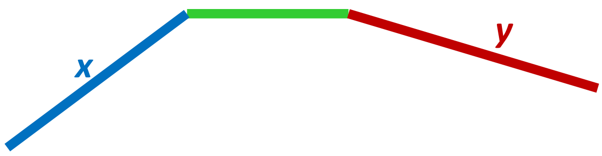
$$a\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \left(x=\frac{D_x}{D}=\frac{-a\cdot(a-1)}{-a^2}=\frac{a-1}{a}\ \ ;\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{a\cdot(a-1)}{-a^2}=\frac{a-1}{-a}=\frac{1-a}{a}\right)$$

$Se\ D=0\ \ cioè\ \ a=0;\qquad \Rightarrow\ \begin{cases}x+y=-1\\ x+y=-1\end{cases}\qquad Sistema\ indeterminato$

*Riepilogando:*

| Valore del parametro | Tipo di equazione | Soluzione |
|---|---|---|
| $a=0$ | *Sistema indeterminato* | $\infty$ *soluzioni* |
| $a\neq 0$ | *Sistema determinato* | $\left(\frac{a-1}{a}\ ;\ \frac{1-a}{a}\right)$ |

**6. Un ciclista compie un viaggio: all'andata impiega $5^{\mathrm{h}}\,36^{\mathrm{m}}$ e al ritorno $5^{\mathrm{h}}\,32^{\mathrm{m}}$. Sapendo che il percorso prevede 32 km di tratti pianeggianti nei quali la sua velocità è di 16 km/h , tratti in salita nei quali procede a 12 km/h e tratti in discesa nei quali procede a $20\ km/h$ , quanto sono lunghi i tratti in salita e quelli in discesa del percorso di andata ?**




<u>Soluzione</u>

*Poniamo la lunghezza del tratto in salita dell'andata = lunghezza del tratto in discesa del ritorno = x e la lunghezza del tratto in discesa dell'andata = lunghezza del tratto in salita del ritorno = y ,* con $x,y\in R^+$ .

*Trasformiamo i due tempi in ore:*

$$t_A=5^h\,36^m=5^h\left(\frac{36}{60}\right)^h=\left(5+\frac{3}{5}\right)^h=\left(\frac{28}{5}\right)^h\qquad\qquad t_B=5^h\,32^m=5^h\left(\frac{32}{60}\right)^h=\left(5+\frac{8}{15}\right)^h=\left(\frac{83}{15}\right)^h$$

*La soluzione del problema è dato dal seguente sistema lineare:* $\begin{cases}t_{Salita}+t_{Pianura}+t_{Discesa}=t_{Andata}\\ t_{Salita}+t_{Pianura}+t_{Discesa}=t_{Ritorno}\end{cases}$

*Ricordando che* $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *si ha:* $\Delta t=\frac{\Delta s}{v}$

$$\begin{cases}\frac{x}{12}+\frac{32}{16}+\frac{y}{20}=\frac{28}{5}\\ \frac{x}{20}+\frac{32}{16}+\frac{y}{12}=\frac{83}{15}\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x}{12}+2+\frac{y}{20}=\frac{28}{5}\\ \frac{x}{20}+2+\frac{y}{12}=\frac{83}{15}\end{cases}\qquad \begin{cases}5x+120+3y=336\\ 3x+120+5y=332\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x+3y=216\\ 3x+5y=212\end{cases}\qquad \begin{cases}y=72-\frac{5}{3}x\\ \end{cases}\qquad \begin{cases}\\ 3x+5\cdot\left(72-\frac{5}{3}x\right)=212\end{cases}$$

$$\begin{cases}\\ 3x+360-\frac{25}{3}x=212\end{cases}\qquad \begin{cases}\\ 9x+1080-25x=636\end{cases}\qquad \begin{cases}\\ -16x=-444\end{cases}$$

$$\begin{cases}\\ x=\frac{111}{4}=27{,}75\end{cases}\qquad \begin{cases}y=72-\frac{5}{3}\cdot\frac{111}{4}=72-\frac{185}{4}=\frac{288-185}{4}=\frac{103}{4}=25{,}75\\ \end{cases}$$

$$\begin{cases}x=27{,}75\\ y=25{,}75\end{cases}$$

*Pertanto il tratto in salita dell'andata è lungo 27,75 km mentre quello in discesa è lungo 25,75 km.*

Il secondo sistema lineare poteva essere risolto, con calcoli più semplici, con il metodo di addizione e sottrazione:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 6x - y + 4z = 17 \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases} \qquad \textcolor{blue}{\mathbf{2}\cdot}\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 6x - y + 4z = 17 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 6x - 2y + 4z = 20 \\ 6x - \ \ y + 4z = 17 \end{cases} \quad \begin{matrix} - \\ = \end{matrix} \\ \hline \qquad -y \qquad = 3\,; \qquad \boldsymbol{y = -3} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ - \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 3 + 2z = 10 \\ - \\ x - 6 - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ \ \ x - 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ = \end{matrix} \\ \hline 4x \quad = 8\,; \qquad \boldsymbol{x = 2} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ - \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot 2 + 3 + 2z = 10 \\ - \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 + 3 + 2z = 10 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z = 1 \\ - \\ - \end{cases} \qquad \left(\boldsymbol{x = 2\,;\ y = -3\,;\ z = \frac{1}{2}}\right).$$