Classe *2A Liceo Scientifico* *30 marzo 2021*

Prova di Matematica: ***Equazioni di II grado e parabola***

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \qquad \sqrt{2}\,x^2 - 4 = 0 \qquad \frac{1}{x^2-3x} - \frac{9}{8x} = \frac{29}{2x^3+2x^2-24x} - \frac{1}{x^2+4x}$$

2. Data l'equazione parametrica $4x^2 - 2(k+2)x + 2k = 0$ **nell'incognita x. Determina per quali valori di** k**:**

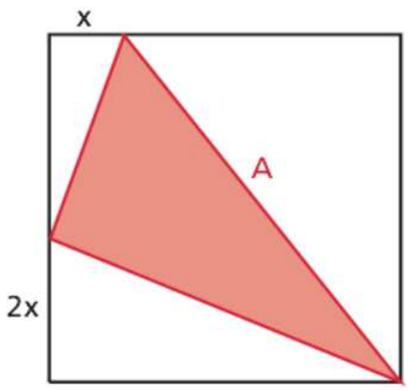
a. ammette soluzioni reali;
b. ammette soluzioni reali e opposte;
c. ammette una soluzione uguale a zero;
d. ammette una soluzione uguale a 2;
e. ammette soluzioni reali tali che la loro somma è uguale a 5
f. ammette soluzioni reali tali che la somma dei reciproci delle soluzioni è uguale a 6;

3. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale nell'incognita x **:**

$$\frac{(a+2)(3-x)}{a} + 2 = \frac{6}{x}$$

4. Problema

Il lato del quadrato raffigurato misura 2 cm .
a. Dimostra che l'area colorata vale $A = x^2 - 2x + 2$.
b. Individua i limiti geometrici della variabile x.
c. Rappresenta graficamente la funzione area $A(x)$.
d. Esiste un valore di x per cui l'area è nulla?
e. Esiste un valore di x per cui l'area è minima? Se esiste, quanto vale?
f. Esiste un valore di x per cui l'area è massima? Se esiste, quanto vale?
g. Trova per quale valore di x l'area misura 1,25 cm^2 .



Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$4x^2-8x+3=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(-4)^2-4\cdot 3=16-12=4\,;$$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{4\mp\sqrt{4}}{4}= \begin{array}{l} x_1=\frac{4-2}{4}=\frac{2}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ x_2=\frac{4+2}{4}=\frac{6}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{array}$$

$$\sqrt{2}x^2-4=0\,; \qquad \sqrt{2}x^2=4\,; \qquad x^2=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,; \qquad x_{1,2}=\mp\sqrt{2\sqrt{2}}=\mp\sqrt{\sqrt{8}}=\mp\sqrt[4]{\mathbf{8}}\,.$$

$$\frac{1}{x^2-3x}-\frac{9}{8x}=\frac{29}{2x^3+2x^2-24x}-\frac{1}{x^2+4x}\,; \qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq 3\ \wedge\ x\neq -4\,.$$

$$\frac{1}{x(x-3)}-\frac{9}{8x}=\frac{29}{2x(x-3)(x+4)}-\frac{1}{x(x+4)}\,;$$

$$\frac{1}{x(x-3)}-\frac{9}{8x}=\frac{29}{2x(x-3)(x+4)}-\frac{1}{x(x+4)}\,; \qquad m.c.m.=\ 8x(x-3)(x+4)$$

$$8(x+4)-9(x-3)(x+4)=4\cdot 29-8(x-3)\,;$$

$$8x+32-9(x^2+x-12)=116-8x+24\,;$$

$$8x+32-9x^2-9x+108-116+8x-24=0\,;$$

$$-9x^2+7x=0\,;$$

$$9x^2-7x=0\,; \qquad x\cdot(9x-7)=0 \quad \begin{array}{ll} x=0 & \quad Non\ accettabile \\ 9x-7=0\,; \quad \boldsymbol{x=\frac{7}{9}} & \quad \boldsymbol{Accettabile} \end{array}$$

Data l'equazione parametrica $4x^2-2(k+2)x+2k=0$ nell'incognita x. Determina per quali valori di k :

a. ammette soluzioni reali;
b. ammette soluzioni reali e opposte;
c. ammette una soluzione uguale a zero;
d. ammette una soluzione uguale a 2;
e. ammette soluzioni reali tali che la loro somma è uguale a 5
f. ammette soluzioni reali tali che la somma dei reciproci delle soluzioni è uguale a 6;

$$A=4 \qquad B=-2(k+2) \qquad C=2k$$

Soluzione a

$$\frac{\Delta}{4}\geq 0: \quad (-k-2)^2-4\cdot 2k\geq 0\,; \quad k^2+4+4k-8k\geq 0\,; \quad k^2+4-4k\geq 0\,; \quad (k-2)^2\geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{k\in R}\,.$$

Soluzione b

$$B=0: \quad -2(k+2)=0\,; \quad \boldsymbol{k=-2}\,.$$

Soluzione c

$$C=0: \quad 2k=0\,; \quad \boldsymbol{k=0}\,.$$

Soluzione d

Imponiamo che $x=2$ sia una soluzione dell'equazione :

$$4\cdot 2^2-2(k+2)\cdot 2+2k=0\,; \quad 16-4k-8+2k=0\,; \quad 2k=8\,; \quad \boldsymbol{k=4}\,.$$

Soluzione e

$$x_1+x_2=5\,; \quad -\frac{B}{A}=5\,; \quad -\frac{-2(k+2)}{4}=5\,; \quad 2(k+2)=20\,; \quad 2k+4=20\,; \quad 2k=16\,; \quad \boldsymbol{k=8}\,.$$

Soluzione f

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=6\,;\qquad \frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=6\,;\qquad \frac{-\frac{B}{A}}{\frac{C}{A}}=6\,;\qquad -\frac{B}{C}=6\,;\qquad -\frac{-2(k+2)}{2k}=6\,;\qquad C.E.:\quad k\neq 0\,;$

$2(k+2)=12k\,;\qquad 2k+4=12k\,;\qquad 10k=4\,;\qquad \boldsymbol{k=\frac{2}{5}}\,.$

$\frac{(a+2)(3-x)}{a}+2=\frac{6}{x}\,;\qquad C.E.(parametro):\ a\neq 0\qquad C.A.(incognita):\ x\neq 0$

$x(a+2)(3-x)+2ax=6a\,;\qquad m.c.m.=\ a(x-a^2)$

$x(3a-ax+6-2x)+2ax-6a=0\,;$

$3ax-ax^2+6x-2x^2+2ax-6a=0\,;$

$-(a+2)x^2+(5a+6)x-6a=0\,;$

$(a+2)x^2-(5a+6)x+6a=0\,;\qquad A=a+2\,;\qquad B=-(5a+6)\,;\qquad C=6a\,.$

$A=0\,;\quad a+2=0\,;\quad a=-2\qquad \Rightarrow Eq.\,di\ I\ grado\qquad -[5(-2)+6]x+6\cdot(-2)=0\,;\quad 4x-12=0\,;\quad x=3\,.$

$\Delta\ =\ (-5a-6)^2-4\cdot(a+2)\cdot 6a\ =\ 25a^2+36+60a-24a^2-48a\ =\ a^2+12a+36\ =\ (a+6)^2\,.$

$\Delta<0:\quad (a+6)^2<0\,;\quad \nexists\, a\in R\,.$

$\Delta=0:\quad (a+6)^2=0\,;\quad a=-6\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B}{2\cdot A}=\frac{5a+6}{2\cdot(a+2)}=\frac{5\cdot(-6)+6}{2\cdot(-6+2)}=\frac{-24}{-8}=3\,.$

$\Delta>0:\quad (a+6)^2>0\,;\quad a\neq -6\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{5a+6\mp\sqrt{(a+6)^2}}{2\cdot(a+2)}=\frac{5a+6\mp(a+6)}{2\cdot(a+2)}=$

$$= \begin{cases} x_1=\frac{5a+6-(a+6)}{2\cdot(a+2)}=\frac{4a}{2\cdot(a+2)}=\boldsymbol{\frac{2a}{a+2}} \\ x_2=\frac{5a+6+(a+6)}{2\cdot(a+2)}=\frac{6a+12}{2\cdot(a+2)}=\frac{6(a+2)}{2\cdot(a+2)}=\boldsymbol{3} \end{cases}$$

Accettabilità delle soluzioni:

La soluzione $x_2=3$ *è accettabile perché* $x_2=3\neq 0\quad \forall a\in R$.

La soluzione $x_1=\frac{2a}{a+2}$ *è accettabile se* $x_1=\frac{2a}{a+2}\neq 0$.

$\frac{2a}{a+2}\neq 0;\qquad C.E.:\ a\neq -2$

$2a\neq 0\,;\qquad a\neq 0\,.$

Riepilogando:

Parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Priva di significato*	-
$a=-2$	*Equazione di I° grado*	$x=3$
$a=-6$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_{1,2}=3$
$a\neq 0\ \wedge\ a\neq -2\ \wedge\ a\neq -6$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1=\frac{2a}{a+2}\ \wedge\ x_2=3$
$\nexists\, a\in R$	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	$\nexists\, x\in R$

Problema

Il lato del quadrato raffigurato misura 2 cm .

a. Dimostra che l'area colorata vale $A = x^2 - 2x + 2$.

b. Individua i limiti geometrici della variabile x.

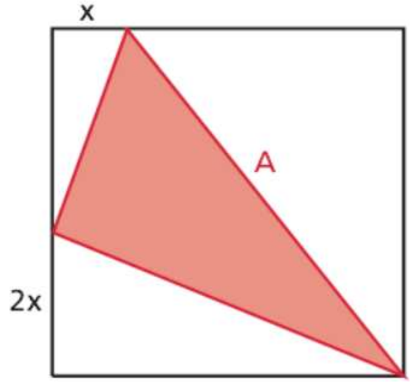
c. Rappresenta graficamente la funzione area $A(x)$.

d. Esiste un valore di x per cui l'area è nulla?

e. Esiste un valore di x per cui l'area è minima? Se esiste, quanto vale?

f. Esiste un valore di x per cui l'area è massima? Se esiste, quanto vale?

g. Trova per quale valore di x l'area misura 1,25 cm^2 .



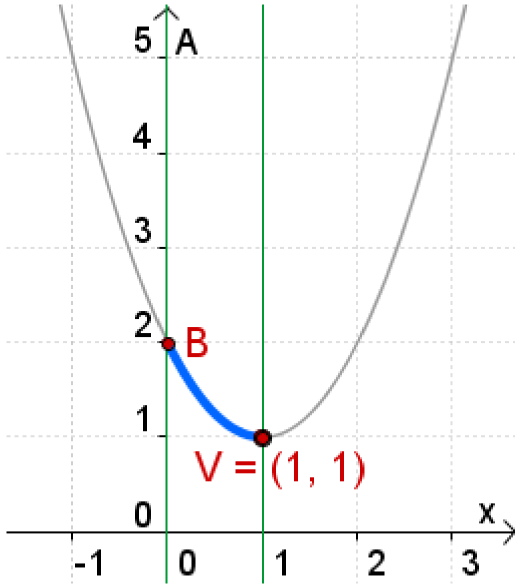
Soluzione a-b

Esprimiamo l'area $A(x)$ *del triangolo colorato in funzione di x:*

$$A(x) = 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - x)$$

$$A(x) = 4 - 2x - x + x^2 - 2 + x$$

$\mathbf{A(x) = x^2 - 2x + 2}$, *con* $0 \leq x \leq 1$ *(limiti geometrici).*



Soluzione d

Non esiste un valore di x per cui l'area è nulla.

Graficamente: perché il grafico della parabola non tocca mai l'asse delle x .

Algebricamente: perché l'equazione $x^2 - 2x + 2 = 0$ *non ha soluzioni reali.*

Infatti $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = (-1)^2 - 2 = -1 < 0$.

Soluzione e

Il valore di x per cui l'area è minima è nell'ascissa del vertice:

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$. *L'area vale:* $A(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$.

Soluzione f

L'area è massima per $x = 0$.

L'area vale: $A(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$.

(Triangolo rettangolo con l'ipotenusa coincidente con la diagonale del quadrato e i cateti coincidenti con i lati del quadrato).

Soluzione g

Imponiamo che l'area sia $A = 1{,}25\ cm^2$; $x^2 - 2x + 2 = \frac{5}{4}$

$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$; $4x^2 - 8x + 3 = 0$;

$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (-4)^2 - 12 = 4$;

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{4 \mp \sqrt{4}}{4} = \begin{matrix} x_1 = \frac{4-2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}} & \textit{Accettabile} \\ x_2 = \frac{4+2}{4} = \frac{3}{2} & \textit{Non accettabile} \end{matrix}$$

L'area misura $1{,}25\ cm^2$ *per* $x = \frac{1}{2}$.