Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2020-2021

Classe *Prima - Liceo Scientifico*

Prova di Matematica : Frazioni algebriche

Alunno: ____ Classe: 1 L. Scientifico *06 marzo 2021*

1. Fattorizza le seguenti espressioni polinomiali:

$x^6 - 1$ $\qquad$ $18x^3 - 9x^2 - 2x + 1$

2. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{6x^3 - 6xy^2}{x^2 + xy} \qquad \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 8} \qquad \frac{ay + ax + 2y + 2x}{4ay + 4ax}$$

3. Semplifica le seguenti espressioni letterali:

$$\frac{3x}{y + 3x} - \frac{y^2}{3xy - 9x^2} + \frac{y^2 + 9x^2}{y^2 - 9x^2} \qquad \frac{x^2 + 9y^2 - 6xy}{xy + y^2} \cdot \frac{xy^2 + y^3}{3xy - x^2}$$

$$\left[\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3-x}\right) : \frac{5 - 2x}{x^2 + 3 - 4x} + \left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 - \frac{x-1}{4 + x^2 - 4x}\right]$$

4. La cisterna in figura, colma, contiene z litri di acqua. Vi sono due fori, A e B, dai quali fuoriescono rispettivamente x e y litri di acqua all'ora. Sapendo che A è posto esattamente a mezza altezza e B sul fondo, esprimi mediante una frazione algebrica il tempo (*in ore*) di svuotamento della cisterna.

Soluzione

1. Fattorizza le seguenti espressioni polinomiali:

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=\mathbf{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$18x^3-9x^2-2x+1=$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(18x^2-2)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2(9x^2-1)=$$

$$=\mathbf{(2x-1)(3x+1)(3x-1)}\ .$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 18 & -9 & -2 & +1 \\ \frac{1}{2} & & +9 & 0 & -1 \\ \hline & 18 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

2. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{6x^3-6xy^2}{x^2+xy}=\frac{6x(x^2-y^2)}{x(x+y)}=\frac{6x(x+y)(x-y)}{x(x+y)}=\mathbf{6(x-y)}\qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq -y$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2+2x-8}=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+4)}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+4}}\qquad C.E.:\ x\neq 2\ \wedge\ x\neq -4$$

$$\frac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}=\frac{a(y+x)+2(y+x)}{4a(y+x)}=\frac{(y+x)(a+2)}{4a(y+x)}=\frac{\boldsymbol{a+2}}{\boldsymbol{4a}}\qquad C.E.:\ a\neq 0\ \wedge\ x\neq -y$$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{3x}{y+3x}-\frac{y^2}{3xy-9x^2}+\frac{y^2+9x^2}{y^2-9x^2}=\qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq \pm 3x$$

$$=\frac{3x}{y+3x}-\frac{y^2}{3x(y-3x)}+\frac{y^2+9x^2}{(y+3x)(y-3x)}=\frac{3x\cdot 3x(y-3x)-y^2(y+3x)+3x(y^2+9x^2)}{3x(y+3x)(y-3x)}=$$

$$=\frac{9x^2y-27x^3-y^3-3xy^2+3xy^2+27x^3}{3x(y+3x)(y-3x)}=\frac{9x^2y-y^3}{3x(y+3x)(y-3x)}=\frac{-y(y^2-9x^2)}{3x(y+3x)(y-3x)}=$$

$$=\frac{-y(y+3x)(y-3x)}{3x(y+3x)(y-3x)}=-\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{3x}}\ .$$

$$\frac{x^2+9y^2-6xy}{xy+y^2}\cdot\frac{xy^2+y^3}{3xy-x^2}=\qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0\ \wedge\ x\neq 3y\ \wedge\ x\neq -y$$

$$=\frac{(x-3y)^2}{y(x+y)}\cdot\frac{y^2(x+y)}{-x(x-3y)}=-\frac{y(x-3y)}{x}=\frac{\boldsymbol{y(3y-x)}}{\boldsymbol{x}}\ .$$

$$\left[\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}\right):\frac{5-2x}{x^2+3-4x}+\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2\right]:\left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{4+x^2-4x}\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{3-x-(x-2)}{(x-2)(3-x)}\right):\frac{5-2x}{(x-1)(x-3)}+\frac{(1-x)^2}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{5-2x}{(x-2)(3-x)}\cdot\frac{-(x-1)(3-x)}{5-2x}+\frac{(1-x)^2}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{(x-1)^2-(x-1)}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{1-x}{x-2}+\frac{(1-x)^2}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{x^2+1-2x-x+1}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{(1-x)(x-2)+(1-x)^2}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{x-2-x^2+2x+1+x^2-2x}{(x-2)^2}\right]:\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{x-1}{(x-2)^2}:\frac{x-1}{x-2}=$$

$$=\frac{x-1}{(x-2)^2}\cdot\frac{x-2}{x-1}=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{x-2}}\qquad\qquad C.E.:\ x\neq 1\ \wedge\ x\neq 2\ \wedge\ x\neq 3\ \wedge\ x\neq\frac{5}{2}$$

4. La cisterna in figura, colma, contiene z litri di acqua. Vi sono due fori, A e B, dai quali fuoriescono rispettivamente x e y litri di acqua all'ora. Sapendo che A è posto esattamente a mezza altezza e B sul fondo, esprimi mediante una frazione algebrica il tempo (*in ore*) di svuotamento della cisterna.

Soluzione

Il tempo di svuotamento è uguale al rapporto fra la quantità di acqua e la portata di acqua del foro.

L'acqua che si trova al di sopra del foro A viene svuotata dai fori A e B.

$$t_1=\frac{Quantita'\ di\ acqua}{Portata\ A+Portata\ B}=\frac{\frac{z}{2}}{x+y}=\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{z}{2(x+y)}.$$

L'acqua che si trova al di sotto dei fori A e B viene svuotata solo dal foro B.

$$t_2=\frac{Quantita'\ di\ acqua}{Portata\ B}=\frac{\frac{z}{2}}{y}=\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{z}{2y}.$$

Il tempo di svuotamento totale è:

$$t_1+t_2=\frac{z}{2(x+y)}+\frac{z}{2y}=\frac{yz+z(x+y)}{2y(x+y)}=\frac{yz+zx+yz}{2y(x+y)}=\frac{xz+2yz}{2y(x+y)}=\frac{z(x+2y)}{2y(x+y)}.$$