Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2019-2020
Classe *2A Liceo Scientifico*

7 dicembre 2019

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

1. Risolvi graficamente il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + \frac{3}{2}y + 3 = 0 \\ 2x + y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

2. Tre diverse compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:

- **la società A applica un costo fisso di 4 centesimi di scatto alla risposta più 0,5 centesimi per ogni minuto di conversazione;**
- **la società B applica un costo fisso di 1 centesimo di scatto alla risposta più 2 centesimi per ogni minuto di conversazione;**
- **la società C applica un costo fisso di 9 centesimi di scatto alla risposta e minuti illimitati.**

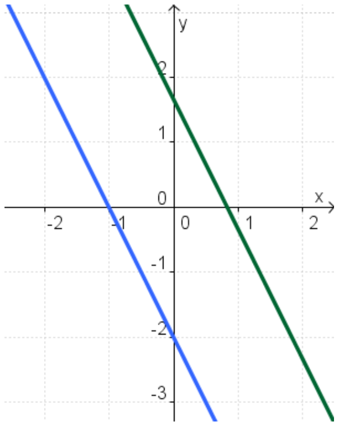
Stabilisci, in dipendenza della durata di una telefonata, quale scelta è la più conveniente.

Dati nel piano cartesiano i punti: $\mathrm{A}(-1\,;2)$, $\mathrm{B}(7\,;-4)$ e $\mathrm{C}(5\,;5)$, determina:

A. il perimetro del triangolo ABC;
B. l'area del triangolo ABC;
C. il quarto vertice D del parallelogramma ABCD;
D. i vertici del triangolo $\mathrm{A'B'C'}$ simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto $P(1;\ -2)$.

Soluzione

1. Risolvi graficamente il seguente sistema lineare:



$$\begin{cases} 3x + \frac{3}{2}y + 3 = 0 \\ 2x + y = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 3y + 6 = 0 \\ 6x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = -2x + \frac{5}{3} \end{cases}$$

$(m = m') \quad \wedge \quad (q \neq q')$ *Sistema impossibile*

oppure

$$\left(\frac{a}{a'} = 1\right) = \left(\frac{b}{b'} = 1\right) \neq \left(\frac{c}{c'} = -\frac{6}{5}\right)$$

2. Tre diverse compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:

a. la società A applica un costo fisso di 4 centesimi di scatto alla risposta più 0,5 centesimi per ogni minuto di conversazione;

b. la società B applica un costo fisso di 1 centesimo di scatto alla risposta più 2 centesimi per ogni minuto di conversazione;

c. la società C applica un costo fisso di 9 centesimi di scatto alla risposta e minuti illimitati.

Stabilisci, in dipendenza della durata di una telefonata, quale scelta è la più conveniente.

Soluzione

Ponendo il numero dei minuti di conversazione = x *e il costo della telefonata* = y , *con* $x \in N \;\wedge\; y \in Q^+$, *si ottengono le equazioni delle tre tariffe:*

A: $y = \frac{1}{2}x + 4$ $\qquad$ B: $y = 2x + 1$ $\qquad$ C. $y = 9$

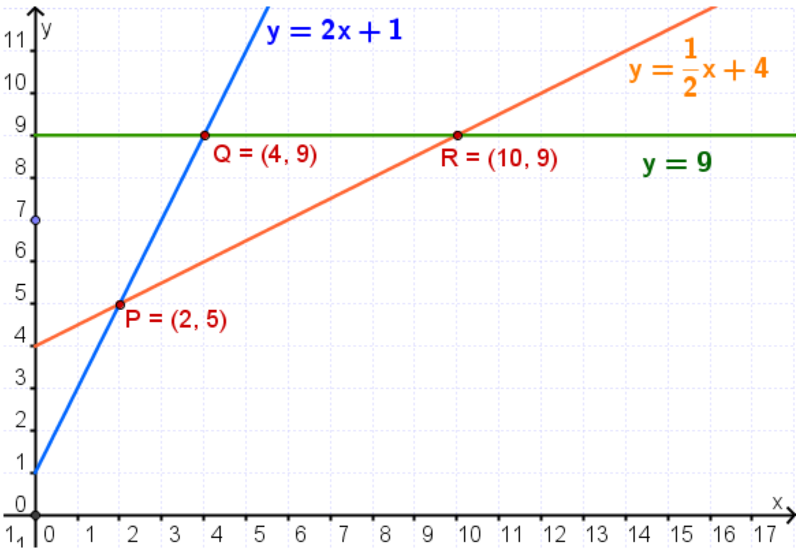
Determiniamo i punti di intersezione fra le tre funzioni lineari:

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = \frac{1}{2}x + 4 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2 = x + 8 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P\,(2\,;5)$$

$$\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = 9 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q\,(4\,;9)$$

$$\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 = 9 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x + 8 = 18 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R\,(10\,;9)$$

Tracciamo poi i grafici delle tre funzioni lineari:



Dall'analisi dei grafici si ottiene:

Per $x < 2$ *è più conveniente la società B;*

Per $2 < x < 10$ *è più conveniente la società A;*

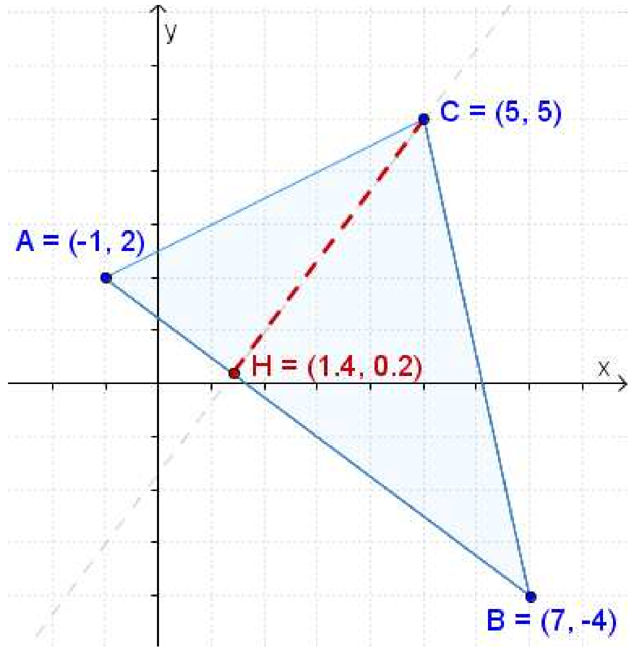
Per $x > 10$ *è più conveniente la società C*

Per $x = 2$ *per 2 minuti di conversazione è indifferente scegliere la società A o la società B.*

Per $x = 10$ *per 10 minuti di conversazione è indifferente scegliere la società A o la società C.*

Dati nel piano cartesiano i punti: $A(-1\,;2)$, $B(7\,;-4)$ e $C(5\,;5)$, determina:

E. **il perimetro del triangolo ABC;**
F. **l'area del triangolo ABC;**
G. **il quarto vertice D del parallelogramma ABCD;**
H. **i vertici del triangolo A'B'C' simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto $P(1;\ -2)$.**



Soluzione A

Determiniamo la misura del perimetro del triangolo ABC:

$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-7)^2 + (2+4)^2} =$
$= \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\,.$

$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(7-5)^2 + (-4-5)^2} =$
$= \sqrt{4+81} = \sqrt{85}\,.$

$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-5)^2} =$
$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,.$

Pertanto il perimetro del triangolo ABC è:

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 10 + \sqrt{85} + 3\sqrt{5}$

Soluzione B

Determiniamo l'equazione della retta AB:

$\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}\,;\qquad \dfrac{y-2}{-4-2} = \dfrac{x+1}{7+1}\,;\qquad \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{x+1}{8}\,;$

$8(y-2) = -6(x+1)\,;\qquad 8y - 16 = -6x - 6\,;$

$8y = -6x + 10\,;\qquad y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}\,;\qquad \left(m_{AB} = -\dfrac{3}{4}\right).$

Determiniamo l'equazione della retta CH passante per il vertice C e perpendicolare alla retta AB:

Essendo $CH \perp AB \quad \Rightarrow \quad m_{CH} = -\frac{1}{m_{AB}} = +\frac{4}{3}.$

L'equazione della retta CH è:

$y - y_C = m_{CH}(x - x_C)\,;\quad y - 5 = \dfrac{4}{3}\cdot(x-5)\,;\quad y - 5 = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{20}{3}\,;\quad y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3}$

Determiniamo le coordinate del punto H, punto di intersezione delle rette CH e AB:

$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3} \end{cases}\quad \begin{cases} \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ - \end{cases}\quad \begin{cases} 16x - 20 = -9x + 15 \\ - \end{cases}\quad \begin{cases} 25x = 35 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ - \end{cases}\quad \begin{cases} - \\ y = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{7}{5} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{28}{15} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{28-25}{15} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} \end{cases}\qquad \Rightarrow \quad H\left(\dfrac{7}{5}\,;\dfrac{1}{5}\right)$

Determiniamo la misura dell'altezza CH del triangolo:

$\overline{CH} = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2} = \sqrt{\left(5 - \dfrac{7}{5}\right)^2 + \left(5 - \dfrac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{25-7}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{25-1}{5}\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{18}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{324}{25} + \dfrac{576}{25}} = \sqrt{\dfrac{900}{25}} = \sqrt{36} = 6\,.$

Pertanto l'area del triangolo è:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH} = \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 6 = 30\,.$

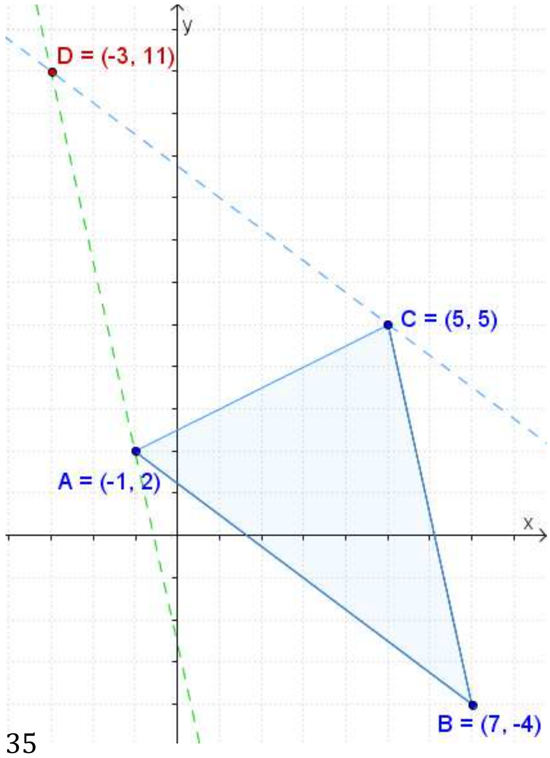
Soluzione C

Il coefficiente angolare della retta AB è: $\quad m_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Essendo $CD \parallel AB \qquad \Rightarrow \qquad m_{CD} = m_{AB} = -\dfrac{3}{4}$.

Determiniamo l'equazione della retta CD passante per il vertice C e parallela alla retta AB: $y - y_C = m_{CD}(x - x_C)$;

$y - 5 = -\dfrac{3}{4}(x-5)$; $\quad y - 5 = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{4}$; $\quad y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{35}{4}$.



Determiniamo il coefficiente angolare della retta BC:

$m_{BC} = \dfrac{-4-5}{7-5} = -\dfrac{9}{2}$.

Essendo $AD \parallel BC \qquad \Rightarrow \qquad m_{AD} = m_{BC} = -\frac{9}{2}$.

Determiniamo l'equazione della retta AD passante per il vertice A e parallela alla retta BC: $y - y_A = m_{BC}(x - x_A)$;

$y - 2 = -\dfrac{9}{2}(x+1)$; $\quad y - 2 = -\dfrac{9}{2}x - \dfrac{9}{2}$; $\quad y = -\dfrac{9}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

Determiniamo le coordinate del punto D, punto di intersezione delle rette AD e CD:

$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{35}{4} \\ y = -\dfrac{9}{2}x - \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{9}{2}x - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{35}{4} \\ — \end{cases} \quad \begin{cases} -18x - 10 = -3x + 35 \\ — \end{cases}$

$\begin{cases} 15x = -45 \\ — \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(-3\,;11)$

<u>*Soluzione C*</u>

Le equazioni della simmetria rispetto al punto $P(1,-2)$ *sono:* $\quad \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

I vertici del triangolo $A'B'C'$ *sono:*

$A(-1\,;2) \quad \begin{cases} x' = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ y' = 2 \cdot (-2) - 2 = -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A'(3\,;-6)$

$B(7\,;-4) \quad \begin{cases} x' = 2 \cdot 1 - 7 = -5 \\ y' = 2 \cdot (-2) + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B'(-5\,;0)$

$C(5\,;5) \quad \begin{cases} x' = 2 \cdot 1 - 5 = -3 \\ y' = 2 \cdot (-2) - 5 = -9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C'(-3\,;-9)$