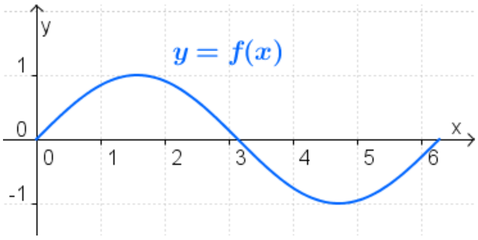
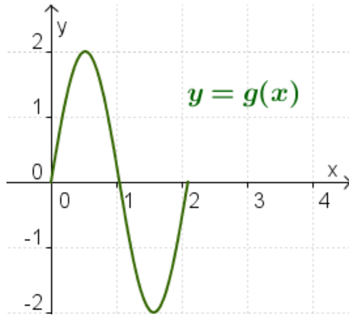
Alunno: ____ Classe: 3E L. Scientifico *5 febbraio 2019*

1. Nei grafici a lato sono rappresentate le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

   Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così disegnati?





□ $g(x) = \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$ □ $g(x) = \frac{1}{3} \cdot f(2x)$ □ $g(x) = 3 \cdot f(2x)$

□ $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(3x)$ □ $g(x) = 2 \cdot f(3x)$ □ $g(x) = 3 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$

2. Determina l'equazione della curva simmetrica di quella di equazione $y = x^2 + 3x - 4$ rispetto:
   a. all'asse y
   b. alla retta di equazione $y = -1$
   c. rispetto all'origine degli assi cartesiani
   d. alla bisettrice del II e IV quadrante

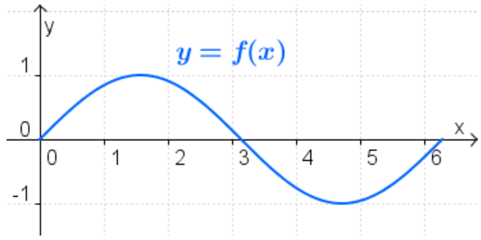
3. I punti $\mathrm{A}(1\ ;\ 3)$ e $\mathrm{A}'(5\ ;\ 2)$ si corrispondono in una traslazione. Determina:
   a. le equazioni della traslazione;
   b. le componenti del vettore di traslazione;
   c. l'equazione della funzione $y = f'(x)$ ottenuta traslando la funzione $y = f(x)$ di equazione $y = x^2 + 2x$ secondo il vettore trovato;
   d. i grafici delle funzioni $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = |f(x)|$.

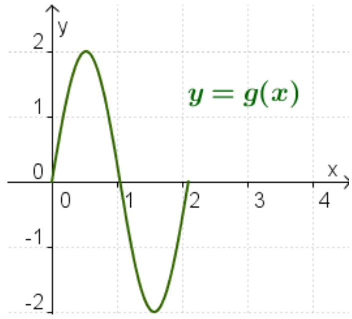
4. Utilizzando il principio di induzione dimostra che: $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2 \qquad \forall n \in N - \{0\}$

5. Partendo da 1, quanti numeri dispari consecutivi si devono sommare per ottenere 1600 ?

Soluzione

1. Nei grafici a lato sono rappresentate le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così disegnati?





   □ $g(x) = 2 \cdot f(3x)$

2. Determina l'equazione della curva simmetrica di quella di equazione $y = x^2 + 3x - 4$ rispetto:

   a. all'asse y
   b. alla retta di equazione $y = -1$
   c. rispetto all'origine degli assi cartesiani
   d. alla bisettrice del II e IV quadrante

<u>*Soluzione a*</u>

Le equazioni della simmetria rispetto all'asse y sono: $S: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ *da cui si ottengono* $S^{-1}: \begin{cases} x = -x' \\ y = +y' \end{cases}$

Si ricava: $y' = (-x')^2 + 3(-x') - 4$; $\quad y = x'^2 - 3x' - 4$

<u>*Soluzione b*</u>

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione $y = -1$ *sono:* $S: \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 \cdot (-1) - y \end{cases}$

da cui si ottengono $S^{-1}: \begin{cases} x = x' \\ y = -2 - y' \end{cases}$

Si ricava: $-2 - y' = x'^2 + 3x' - 4$; $\quad y' = -x'^2 - 3x' + 2$.

<u>*Soluzione c*</u>

Le equazioni della simmetria rispetto all'origine degli assi cartesiani sono: $S: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

da cui si ottengono $S^{-1}: \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$

Si ricava: $-y = (-x)^2 + 3(-x) - 4$; $\quad y = -x^2 + 3x + 4$

<u>*Soluzione d*</u>

Le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante *sono:* $S: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

da cui si ottengono $S^{-1}: \begin{cases} x = -y' \\ y = -x' \end{cases}$

Si ricava: $-x' = (-y')^2 + 3(-y') - 4$; $\quad x' = -y'^2 + 3y' + 4$

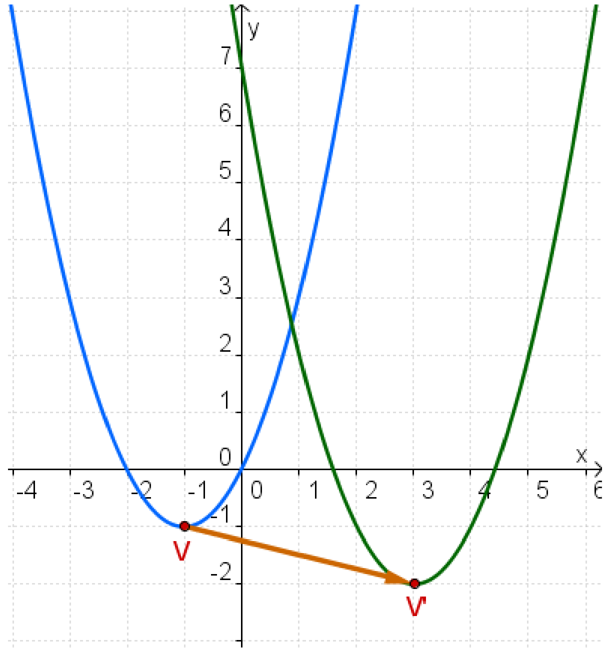
3. I punti $A(1\ ;\ 3)$ e $A'(5\ ;\ 2)$ si corrispondono in una traslazione. Determina:

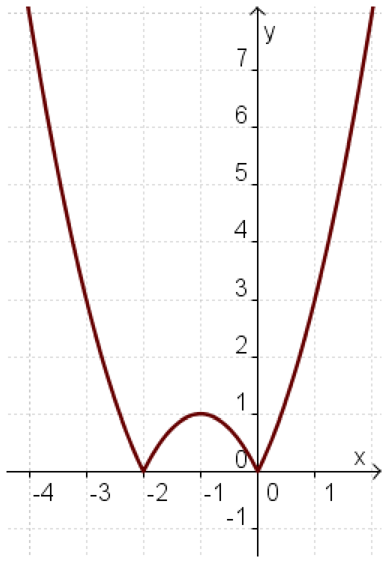
a. le equazioni della traslazione;

b. le componenti del vettore di traslazione;

c. l'equazione della funzione $y = f'(x)$ ottenuta traslando la funzione $y = f(x)$ di equazione $y = x^2 + 2x$ secondo il vettore trovato;

d. i grafici delle funzioni $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = |f(x)|$.





<u>Soluzione</u>

Dalle equazioni della traslazione $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

si ricavano i due parametri a *e* b*:*

$\begin{cases} 5 = 1 + a \\ 2 = 3 + b \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$

Le equazioni della traslazione sono: $T:\ \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Il vettore traslazione è $\vec{v}(4; -1)$.

Dalle equazioni della traslazione si ottiene:

$T^{-1}:\ \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' + 1 \end{cases}$

Sostituendo si ha:

$y' + 1 = (x' - 4)^2 + 2(x' - 4)$;

$y' + 1 = x'^2 + 16 - 8x' + 2x' - 8$;

$y' = x'^2 - 6x' + 7$;

Utilizzando le variabili x *e* y *si ottiene:*

$y = x^2 - 6x + 7$

I grafici sono rappresentati a lato:

4. Utilizzando il principio di induzione dimostra che: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2 \qquad \forall n \in N - \{0\}$

<u>Dimostrazione</u>

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + \ . \ . \ . + (2n - 1)$$

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti si ha: $1 = 1^2$

Supponiamo che la proposizione sia vera per n , cioè è vera: $1 + 3 + 5 + \ . \ . \ . + (2n - 1) = n^2$

e dimostriamo che la proposizione è vera per $n + 1$, cioè: $1 + 3 + 5 + \ . \ . \ . + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2$.

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ . \ . \ . + (2n - 1)}_{n^2} + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2 \ ;$$

$$n^2 + 2n + 2 - 1 = (n + 1)^2 \ ;$$

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \ ;$$

$$(n + 1)^2 = (n + 1)^2 \ .$$

La proposizione è quindi vera per $n + 1$. Pertanto, per il principio di induzione, è vera per ogni $n \geq 1$.

5. Partendo da 1, quanti numeri dispari consecutivi si devono sommare per ottenere 1600 ? *[Kangourou, 2003]*

<u>*Soluzione 1*</u>

Dall'esercizio precedente:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \ . \ . \ . + (2n-1) \ = \ n^2$$

$S_n = 1600$; $n^2 = 1600$; $n = 40.$

<u>*Soluzione 2*</u>

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, . . . $a_n = 2n - 1$.

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $1600 = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $1600 = n \cdot \dfrac{1 + (2n-1)}{2}$; $1600 = n \cdot \dfrac{2n}{2}$;

$n^2 = 1600$; $n = \mp\sqrt{1600} = \mp 40 \quad \Rightarrow \quad n = 40$ *(perché* $n \in N$*)* .