1. La disequazione $\left\|x^2-3x+4\right\| > -3$ □ *è sempre verificata.* □ *non è mai verificata* □ *è verificata per* $x<-1 \ \vee \ x>7$ □ *è verificata per* $-1<x<7$	**2. La disequazione** $\|x\|<3$ □ *è sempre verificata* □ *non è mai verificata* □ *è verificata per* $-3<x<3$ □ *è verificata per* $x<-3 \ \vee \ x>3$

3. Indica se ogni affermazione è vera o falsa

a. *La disequazione* $\frac{(x-2)^2}{x^2} \geq 0$ *è verificata* $\forall x \neq 2 \ \wedge \ x \neq 0$. V □ F □

b. *La disequazione* $\sqrt{-x} \geq 0$ *è impossibile.* V □ F □

c. *La disequazione* $\left|\frac{3x+1}{x-2}\right| \leq 4$ *è equivalente a* $-4 \leq \frac{3x+1}{x-2} \leq +4$ V □ F □

d. *Se* $a<3$, $\frac{x+5}{2a-6} > 0$ *è verificato per* $x<-5$ V □ F □

e. $x^{12}+5>0 \qquad \forall x \in R$ V □ F □

4. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

$x^4+4x^3-7x^2-10x<0$

$|x|+|3+x|=1-x$

$2-\sqrt{x+2}=\sqrt{x}$

$$\begin{cases} (x-1)(9x-x^3) \leq 0 \\ \dfrac{3}{x+1} \leq \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=0 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{y^2}=\dfrac{19}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+2xy=4 \\ x^2-2y^2=-1 \end{cases}$$

5. Si consideri le lunghezze seguenti: [1] $\quad a+2x \ , \ a-x \ , \ 2a-x$
dove a **è una lunghezza nota non nulla e** x **è una lunghezza incognita. Determinare per quali valori di** x **le lunghezze [1] si possano considerare quelle dei lati di un triangolo.** [*Esame di Stato* 2001/2002]

SOLUZIONE

1. La disequazione $\left|x^2 - 3x + 4\right| > -3$

□ *è sempre verificata*

2. La disequazione $|x| < 3$

□ *è verificata per* $-3 < x < 3$

3. Indica se ogni affermazione è vera o falsa.

a. La disequazione $\frac{(x-2)^2}{x^2} \geq 0$ è verificata $\forall x \neq 2 \ \wedge \ x \neq 0$. F □

b. La disequazione $\sqrt{-x} \geq 0$ è impossibile. F □

c. La disequazione $\left|\frac{3x+1}{x-2}\right| \leq 4$ è equivalente a $-4 \leq \frac{3x+1}{x-2} \leq +4$ V □

d. Se $a < 3$, $\frac{x+5}{2a-6} > 0$ è verificato per $x < -5$ V □

e. $x^{12} + 5 > 0 \qquad \forall x \in R$ V □

4) Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

$x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 10x < 0$; $\qquad x \cdot (x^3 + 4x^2 - 7x - 10) < 0$;

Scomponendo con Ruffini si ha:

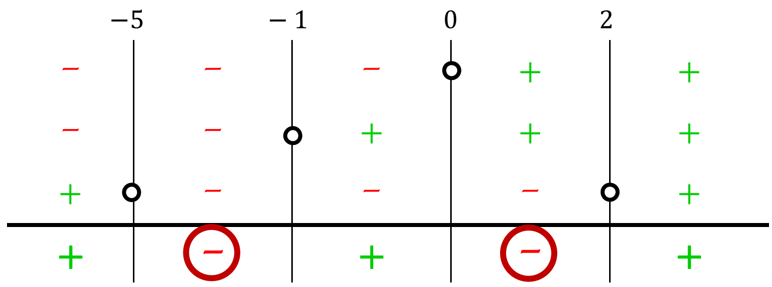
$x \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0$

	1	$+4$	-7	-10
-1		-1	-3	$+10$
	1	$+3$	-10	0

$x > 0 \qquad x > 0$

$x + 1 > 0 \qquad x > -1$

$x^2 + 3x - 10 > 0 \qquad x < -5 \ \vee \ x > 2$



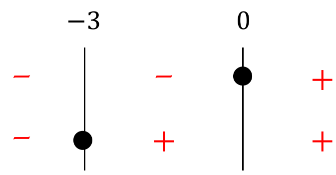
$-5 < x < -1 \quad \vee \quad 0 < x < 2$

$|x| + |3 + x| = 1 - x$

Studiamo il segno dei valori assoluti:

$x \geq 0 \qquad x \geq 0$

$3 + x \geq 0 \qquad x \geq -3$



L'equazione è equivalente all'unione dei seguenti tre sistemi:

$\begin{cases} x < -3 \\ -(x) - (3 + x) = 1 - x \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -(x) + (3 + x) = 1 - x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ +(x) + (3 + x) = 1 - x \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3 \\ -x - 3 - x = 1 - x \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -x + 3 + x = 1 - x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ x + 3 + x = 1 - x \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3 \\ -x = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ x = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ 3x = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3 \\ x = -4 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ x = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Pertanto le soluzioni accettabili sono $x = -4 \quad \wedge \quad x = -2$.

$2-\sqrt{x+2}=\sqrt{x}$ $\qquad$ ***C.E.***: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ge 0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x\ge 0}$

$2=\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$; $\qquad 2^2=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^2$; $\qquad 4=(x+2)+(x)+2\sqrt{x(x+2)}$;

$4=2x+2+2\sqrt{x(x+2)}$; $\qquad 2-2x=2\sqrt{x(x+2)}$; $\qquad 1-x=\sqrt{x(x+2)}$;

Risolviamo $\;1-x=\sqrt{x(x+2)}$

$$\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ (1-x)^2=\left(\sqrt{x(x+2)}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x\le 1} \\ \boldsymbol{x=\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Risolviamo $\;(1-x)^2=\left(\sqrt{x(x+2)}\right)^2$; $\qquad 1+x^2-2x=x^2+2x$; $\qquad -4x=-1$; $\qquad x=\frac{1}{4}$.

La soluzione $\boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$ *soddisfa entrambe le condizioni di esistenza* $\boldsymbol{x\ge 0}$ *e* $\boldsymbol{x\le 1}$, *pertanto è accettabile.*

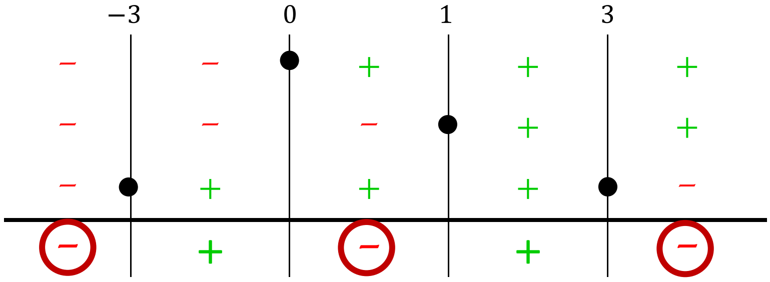
$$\begin{cases} (x-1)(9x-x^3)\le 0 \\ \dfrac{3}{x+1}\le\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Risolviamo $\;(x-1)(9x-x^3)\le 0$; $\qquad x\cdot(x-1)\cdot(9-x^2)\le 0$;

$x\ge 0 \qquad x\ge 0$

$x-1\ge 0 \qquad x\ge 1$

$9-x^2\ge 0 \qquad -3\le x\le 3$



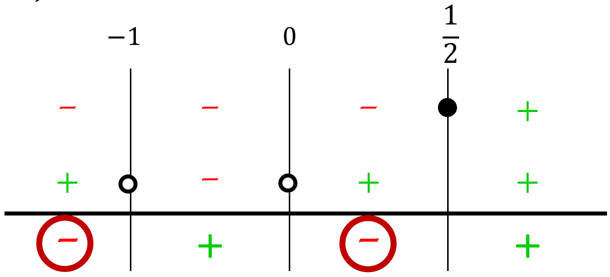
$x\le -3 \quad \vee \quad 0\le x\le 1 \quad \vee \quad x\ge 3$

Risolviamo

$\dfrac{3}{x+1}\le\dfrac{1}{x}$; $\qquad \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x}\le 0$; $\qquad \dfrac{3x-1\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}\le 0$; $\qquad \dfrac{2x-1}{x^2+x}\le 0$;

$2x-1\ge 0 \qquad x\ge\dfrac{1}{2}$

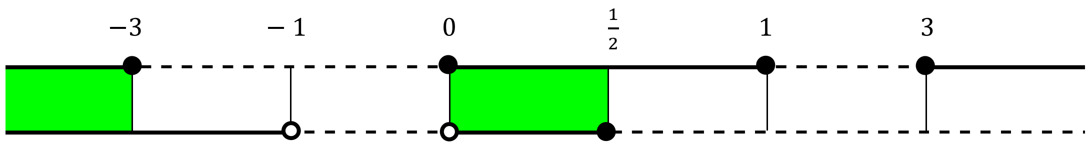
$x^2+x>0 \qquad x<-1 \quad \vee \quad x>0$



$x<-1 \quad \vee \quad 0<x\le\dfrac{1}{2}$

Ritornando al sistema iniziale si ha:

$$\begin{cases} (x-1)(9x-x^3)\le 0 \\ \dfrac{3}{x+1}\le\dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le -3 \quad \vee \quad 0\le x\le 1 \quad \vee \quad x\ge 3 \\ x<-1 \quad \vee \quad 0<x\le\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Pertanto le soluzioni sono: $\;x\le -3 \quad \vee \quad 0<x\le\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 4 \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ - \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases} \\ \\ B \begin{cases} x + y = +2 \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases} \end{array}$$

Risolviamo il sistema A :

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x - 2 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 - 2(-x-2)^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x^2 - 2(x^2 + 4 + 4x) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 - 2x^2 - 8 - 8x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 + 8x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x_1 = -7 \\ x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -7 \\ y_1 = +5 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \end{array}$$

Risolviamo il sistema B :

$$\begin{cases} x + y = +2 \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 - x \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 - 2(2-x)^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x^2 - 2(4 + x^2 - 4x)^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 - 8 - 2x^2 + 8x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x_3 = +1 \\ x_4 = +7 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} x_3 = +1 \\ y_3 = +1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_4 = +7 \\ y_2 = -5 \end{cases} \end{array}$$

Pertanto il sistema ha le seguenti soluzioni : $(-7\,;\ 5)$ $(-1\,;\ -1)$ $(1\ ;\ 1)$ $(7\ ;\ -5)$.

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{19}{9} \end{cases} \qquad \textit{Poniamo} \quad \frac{1}{x^2} = a\,; \ \frac{1}{y^2} = b$$

$$\begin{cases} 9a - b = 0 \\ a + 2b = \dfrac{19}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a \ - \ b \ = \ 0 \\ 9a + 18\,b \ = 19 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 19b = 19 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a - 1 = 0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{9} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{y^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \mp 3 \\ y_{1,2} = \mp 1 \end{cases} \qquad (-3\ ;\ -1) \quad (-3\,;\ +1) \quad (+3\ ;\ -1) \quad (+3\,;\ +1)$$

5. **Si consideri le lunghezze seguenti:** $a+2x$, $a-x$, $2a-x$ $\quad [1]$
dove a **è una lunghezza nota non nulla e** x **è una lunghezza incognita. Determinare per quali valori di** x **le lunghezze** $[1]$ **si possano considerare quelle dei lati di un triangolo.** [*Esame di Stato* 2001/2002]

Soluzione

Le lunghezze $[1]$ *rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo se soddisfano le seguenti condizioni:*

a. *le lunghezze dei tre lati sono numeri positivi;*
b. *la lunghezza di ogni lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due lati.*

$$\begin{cases} a+2x>0 \\ a-x>0 \\ 2a-x>0 \\ a+2x<a-x+2a-x \\ a-x<a+2x+2a-x \\ 2a-x<a+2x+a-x \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2x>0 \\ x<a \\ x<2a \\ 4x<2a \\ 2x+2a>0 \\ 2x>0 \end{cases}$$

Essendo x *e* a *lunghezze, risulta* $a>0 \ \wedge \ x>0$.

Pertanto si ha:

$$\begin{cases} \forall\, a,x \in R^+ \\ \quad x<a \\ \quad x<2a \\ \quad x<\frac{a}{2} \\ \forall\, a,x \in R^+ \\ \quad x>0 \end{cases}$$

Da cui si ricava $0<x<\frac{a}{2}$.