Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

Alunno: ______________________________________ *Classe: 3E L. Scientifico* *12 marzo 2019*

Dato il fascio di rette di equazione $(k+1)x - ky + k + 3 = 0$,

a. determina la natura del fascio, individuando l'eventuale centro;

b. determina le equazioni delle rette generatrici;

c. determina le rette del fascio parallele agli assi cartesiani;

d. studia come variano le rette del fascio al crescere di $\boldsymbol{k}$;

e. determina la retta $\boldsymbol{s}$ del fascio che passa per il punto $\boldsymbol{P(1\,;\,6)}$;

f. indica con $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, rispettivamente, le intersezioni della retta $\boldsymbol{s}$ con l'asse $\boldsymbol{x}$ e con l'asse $\boldsymbol{y}$ e determina le loro coordinate;

g. determina perimetro e area del quadrato inscritto nel triangolo $\boldsymbol{AOB}$, avente un lato parallelo ad $\boldsymbol{AB}$.

Soluzione

Essendo il coefficiente angolare del fascio $m_f = -\frac{a}{b} = -\frac{k+1}{-k} = \frac{k+1}{k}$ *dipendente dal parametro* k *, il fascio è proprio.*

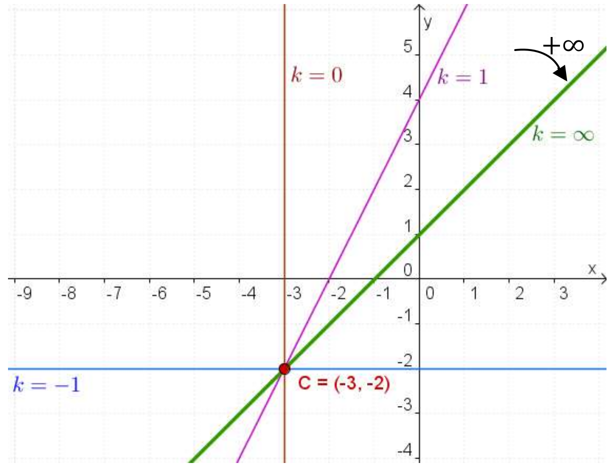
Riscriviamo l'equazione nella forma di combinazione lineare:

$kx + x - ky + k + 3 = 0\,;$ $\qquad x + 3 + k(x - y + 1) = 0\,.$

Le equazioni delle rette generatrici sono:

Per $k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 3 = 0\,;$

$\nexists\, k \in R\ \ (k = \infty) \qquad \Rightarrow \qquad x - y + 1 = 0\,;$



Le coordinate del centro del fascio si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette generatrici:

$\begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ -3 - y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C(-3\,;\,-2)$

Le rette del fascio parallele agli assi cartesiani hanno equazioni:

$x = -3 \qquad \wedge \qquad y = -2\,.$

L'equazione della retta s *del fascio richiesta si ottiene imponendo il passaggio di una generica retta del fascio per il punto* $P(1\,;\,6)$*:*

$(k+1)x - ky + k + 3 = 0\,; \quad (k+1)\cdot 1 - k\cdot 6 + k + 3 = 0\,; \quad k + 1 - 6k + k + 3 = 0\,; \quad -4k = -4\,; \quad k = 1\,.$

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione della retta s *richiesta:*

$(k+1)x - ky + k + 3 = 0\,; \qquad (1+1)x - 1y + 1 + 3 = 0\,; \qquad 2x - y + 4 = 0\,; \qquad y = 2x + 4\,.$

Le intersezioni della retta s con l'asse x e con l'asse y sono:

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(-2\,;\,0)$$

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -y + 4 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(0\,;\,4)$$

Il lato del quadrato parallelo alla retta s ha equazione: $y = 2x + q$.

Un generico punto dell'asse y di questa retta è $C(0\,;q)$ *con* $0 < q < 4$.

Un generico punto dell'asse x di questa retta è $F\left(-\frac{q}{2}\,;0\right)$.

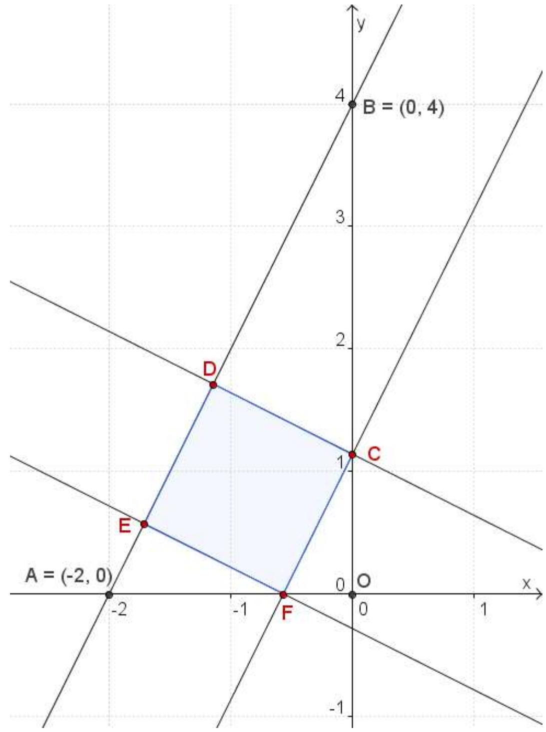
Determiniamo la lunghezza del lato CF :

$$\overline{CF} = \sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2} = \sqrt{\left(0 + \frac{q}{2}\right)^2 + (q - 0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{q^2}{4} + q^2} = \sqrt{\frac{5}{4}q^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}q$$

Determiniamo la lunghezza del lato CD
(distanza del punto $C(0\,;q)$ *dalla retta AB* $2x - y + 4 = 0$ *) :*

$$\overline{CD} = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot q + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - q|}{\sqrt{5}}$$



Affinchè CDEF sia un quadrato deve risultare che:

$$\overline{CD} = \overline{CF}\,; \qquad \frac{|4 - q|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}q\,;$$

$$\sqrt{5} \cdot \frac{|4-q|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}q\,; \qquad |4 - q| = \frac{5}{2}q$$

$$4 - q = -\frac{5}{2}q \qquad 8 - 2q = -5q \qquad 3q = -8 \qquad q = -\frac{8}{3}$$

$$4 - q = +\frac{5}{2}q \qquad 8 - 2q = +5q \qquad 7q = +8 \qquad q = +\frac{8}{7}$$

Delle due soluzioni è accettabile solo la seconda perché il quadrato è inscritto nel triangolo AOB $(0 < q < 4)$.

Quindi la misura del lato $\overline{CF} = \frac{\sqrt{5}}{2}q = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$.

Pertanto il perimetro del quadrato CDEF è $p = 4 \cdot \overline{CF} = 4 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{7} = \frac{16}{7}\sqrt{5}$.

L'area del quadrato CDEF è $S = \overline{CF}^2 = \left(\frac{4\sqrt{5}}{7}\right)^2 = \frac{80}{49}$.