

Prova di Matematica : Parabola

Determina:

- l'equazione della parabola γ_1 avente asse coincidente con l'asse delle x e passante per $A(1; 1)$ e $B(4; 2)$;
- l'equazione della parabola γ_2 avente asse parallelo all'asse delle y e passante per A , per B e per $O(0; 0)$;
- gli ulteriori punti di intersezione C e D ($x_C > x_D$) di γ_1 e γ_2 (oltre ad A e B);
- l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola γ_2 e dalla retta passante per i punti C e D ;
- l'area del quadrilatero convesso $ABCD$.

Soluzione

PETRINI 489.480

Soluzione a

L'equazione della parabola γ_1 è del tipo: $x = ay^2 + by + c$.

Imponiamo il passaggio per i punti $A(1; 1)$ e $B(4; 2)$ e asse coincidente con $y = 0$:

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 4 = 4a + 2b + c \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a + c \\ 4 = 4a + c \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 - a \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 4a + 1 - a \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ a = 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della parabola γ_1 è $x = y^2$.

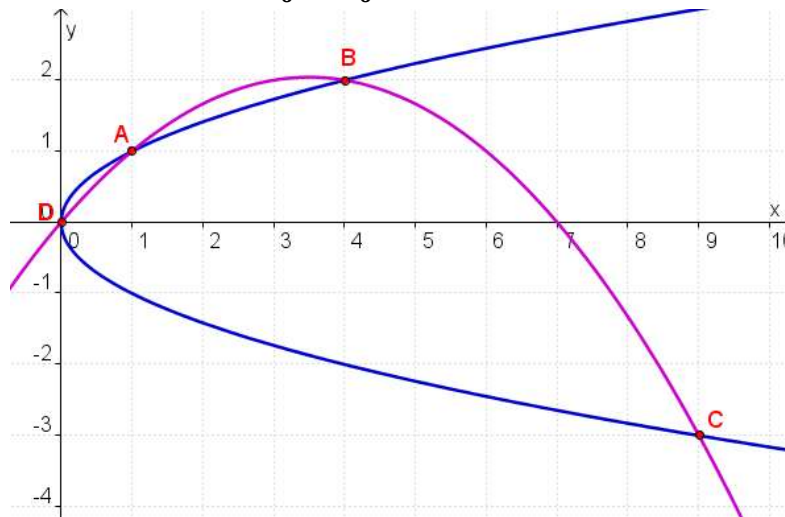
Soluzione b

L'equazione della parabola γ_2 è del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

Imponiamo il passaggio per i punti $A(1; 1)$, $B(4; 2)$ e $O(0; 0)$:

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 2 = 16a + 4b + c \\ 0 = c \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a + b \\ 2 = 16a + 4b \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 - a \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 16a + 4(1 - a) \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ a = -\frac{1}{6} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della parabola γ_2 è $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x$.



Soluzione c

Per determinare gli ulteriori punti di intersezione C e D di γ_1 e γ_2 occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1 & \begin{cases} x = y^2 \end{cases} \\ \gamma_2 & \begin{cases} y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x\right)^2 \\ x = \frac{1}{36}x^4 + \frac{49}{36}x^2 - \frac{7}{18}x^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{36}x^4 + \frac{49}{36}x^2 - \frac{7}{18}x^3 \\ x = \frac{1}{36}x^4 + \frac{49}{36}x^2 - \frac{7}{18}x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 14x^3 + 49x^2 - 36x = 0 \\ x \cdot (x^3 - 14x^2 + 49x - 36) = 0 \end{cases}$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$x \cdot (x - 1)(x^2 - 13x + 36) = 0$$

$$x \cdot (x - 1)(x^2 - 13x + 36) = 0$$

	1	-14	+49	-36
1		+1	-13	+36
	1	-13	+36	//

$$\Delta = 169 - 144 = 25;$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{matrix} x_1 = \frac{13-5}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{13+5}{2} = 9 \end{matrix}$$

$$x \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) \cdot (x - 9) = 0 \quad \begin{matrix} x_D = 0 \\ x_A = 1 \\ x_B = 4 \\ x_C = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_D = 0 \\ y_A = 1 \\ y_B = 2 \\ y_C = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} D(0; 0) \\ A(1; 1) \\ B(4; 2) \\ C(9; -3) \end{matrix}$$

Soluzione d

L'equazione della retta secante CD è:

$$\frac{y-y_D}{y_C-y_D} = \frac{x-x_D}{x_C-x_D}; \quad \frac{y-0}{-3-0} = \frac{x-0}{9-0}; \quad 9y = -3x; \quad x + 3y = 0; \quad y = -\frac{1}{3}x.$$

Determiniamo l'equazione della retta tangente t alla parabola parallela alla retta secante CD:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x \\ y = -\frac{1}{3}x + q \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3}x + q = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x \\ -2x + 6q = -x^2 + 7x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9x + 6q = 0 \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$:

$$b^2 - 4ac = 0; \quad (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6q = 0; \quad 24q = 81; \quad q = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}.$$

La retta tangente t ha equazione: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{27}{8}$.

In forma implicita: $8x + 24y - 81 = 0$.

La misura della Base CD del rettangolo CDD'C' è:

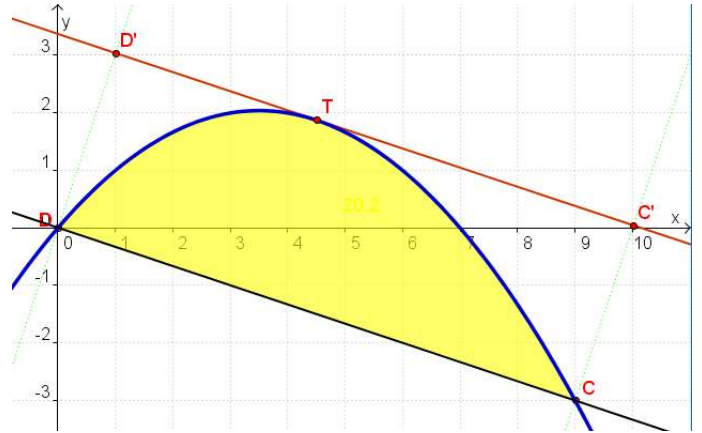
$$\overline{CD} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(9 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

La misura dell'altezza DD' è:

$$\overline{DD'} = d(D, t) = \frac{|ax_D + by_D + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 \cdot 0 + 24 \cdot 0 - 81|}{\sqrt{8^2 + 24^2}} = \frac{|-81|}{\sqrt{64 + 576}} = \frac{81}{\sqrt{640}} = \frac{81}{8\sqrt{10}}.$$

L'area del segmento parabolico è:

$$S_{CDT} = \frac{2}{3} \cdot S_{CDD'C'} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DD'} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{81}{8\sqrt{10}} = \frac{81}{4}.$$



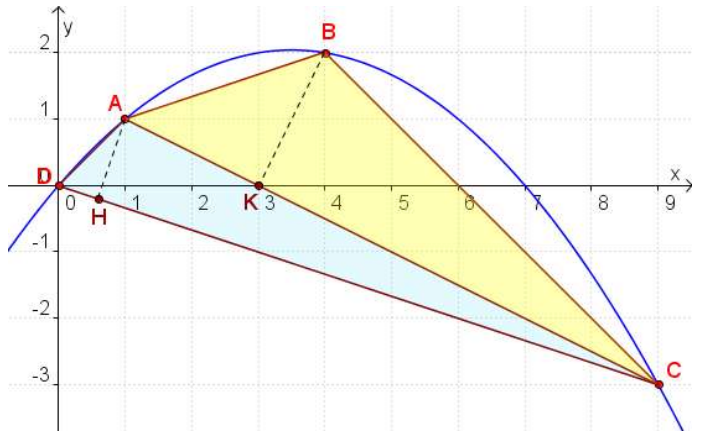
Soluzione e

La misura dell'altezza AH è la distanza del punto A(1; 1) dalla retta CD di equazione $x + 3y = 0$:

$$\overline{AH} = d(A, CD) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

L'area del triangolo ACD è:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 6.$$



La misura della Base AC del triangolo ABC è:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 9)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

L'equazione della retta AC è:

$$\frac{y-y_C}{y_A-y_C} = \frac{x-x_C}{x_A-x_C}; \quad \frac{y+3}{1+3} = \frac{x-9}{1-9}; \quad \frac{y+3}{4} = \frac{x-9}{-8}; \quad -8y - 24 = 4x - 36; \quad 4x + 8y - 12 = 0; \quad x + 2y - 3 = 0.$$

La misura dell'altezza BK è la distanza del punto B(4; 2) dalla retta AC di equazione $x + 2y - 3 = 0$:

$$\overline{BK} = d(B, AC) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}}.$$

L'area del triangolo ABC è: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BK} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 10.$

L'area del quadrilatero ABCD è: $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = 6 + 10 = 16.$