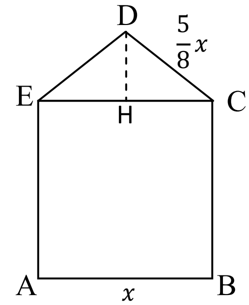
Esercizio 121.323



Essendo $\overline{AB} = x$ *la misura di un segmento* $\Longrightarrow \quad x > 0$.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CDH .

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{HC}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{8}x\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{64}x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{9}{64}x^2} = \frac{3}{8}x \ .$$

$$\overline{BC} = \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \left(324 - \frac{5}{8}x - \frac{5}{8}x - x\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2592 - 5x - 5x - 8x}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2592 - 18x}{8}\right) =$$

$$= \frac{2592 - 18x}{16} = 162 - \frac{9}{8}x \ .$$

Essendo $\overline{BC} = 162 - \frac{9}{8}x$ *la misura di un segmento* $\Longrightarrow \quad 162 - \frac{9}{8}x > 0$;

$1296 - 9x > 0$; $\qquad -9x > -1296$; $\qquad 9x < 1296$; $\qquad x < \frac{1296}{9}$; $\qquad x < 144$.

La misura dell'area in funzione della base x *è :*

$$S(x) = x \cdot \left(162 - \frac{9}{8}x\right) + \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{8}x = 162x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^2 = 162x - \frac{15}{16}x^2 \ ;$$

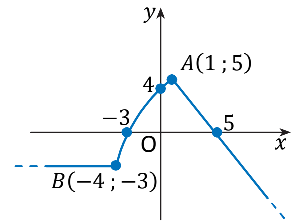
$S(x) = 162x - \frac{15}{16}x^2$ *il cui dominio è* $D\colon\ 0 < x < 144$.

Ponendo $x = 100\ cm$ *si ha:*

$$162 \cdot 100 - \frac{15}{16}100^2 \ ; \qquad 16200 - \frac{15}{16} \cdot 10000 \ ; \qquad 16200 - 9375 = 6825$$

Esercizio 138.A

1. Della funzione $f(x)$ rappresentata a lato, determina:



a. il dominio
b. il codominio
c. $f(-4)$
d. $f(\quad) = 5$
e. $f(0)$
f. gli intervalli in cui $f(x)$ è crescente
g. gli intervalli in cui $f(x) > 0$

Soluzione

a. $Il\ Dominio\ \ D\colon\ R$
b. $Il\ Codominio\ \ C\colon\ y \leq 5$
c. $f(-4) = -3$
d. $f(1) = 5$
e. $f(0) = 4$
f. $f(x)$ è $crescente\ nell'intervallo\ \ ]-4\,,1[$
g. $f(x) > 0\ \ nell'intervallo\ \ ]-3\,,5[$

2. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 9x} \qquad\qquad y = \frac{x}{|x| - 4} \qquad\qquad y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$$

Soluzione

Il dominio della funzione $y = \frac{2}{x^3-6x^2+9x}$ *è* $D\colon\ x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 3\,.$

Infatti:

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0\,; \qquad x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0\,; \qquad x \cdot (x-3)^2 = 0\,; \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \quad Soluzione\ doppia \end{array}$

Il dominio della funzione $y = \frac{x}{|x|-4}$ *è* $D\colon\ x \neq \pm 4\,.$

Infatti:

$|x| - 4 = 0\,; \qquad |x| = 4\,; \qquad x = \pm 4\,.$

Il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}$ *è* $D\colon\ -5 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad x \neq 0\,.$

Infatti:

$\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x \neq 0 \end{cases}$

3. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2+6x}{1-x}$, classificala, determina il suo dominio e i punti di intersezione del grafico con gli assi, studia il segno e rappresenta nel piano cartesiano le regioni in cui si trova il suo grafico.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{x^2+6x}{1-x}$ *è una funzione razionale fratta.*

Il dominio è $D:\ x \neq 1$.

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+6x}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

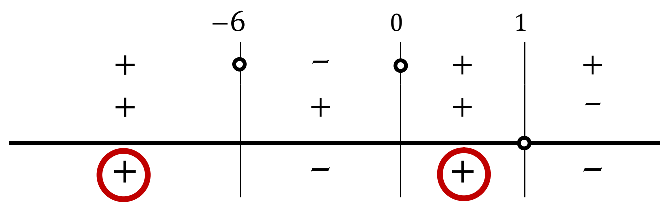
$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+6x}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2+6x}{1-x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+6x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot (x+6) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases} \end{matrix}$$

Segno della funzione:

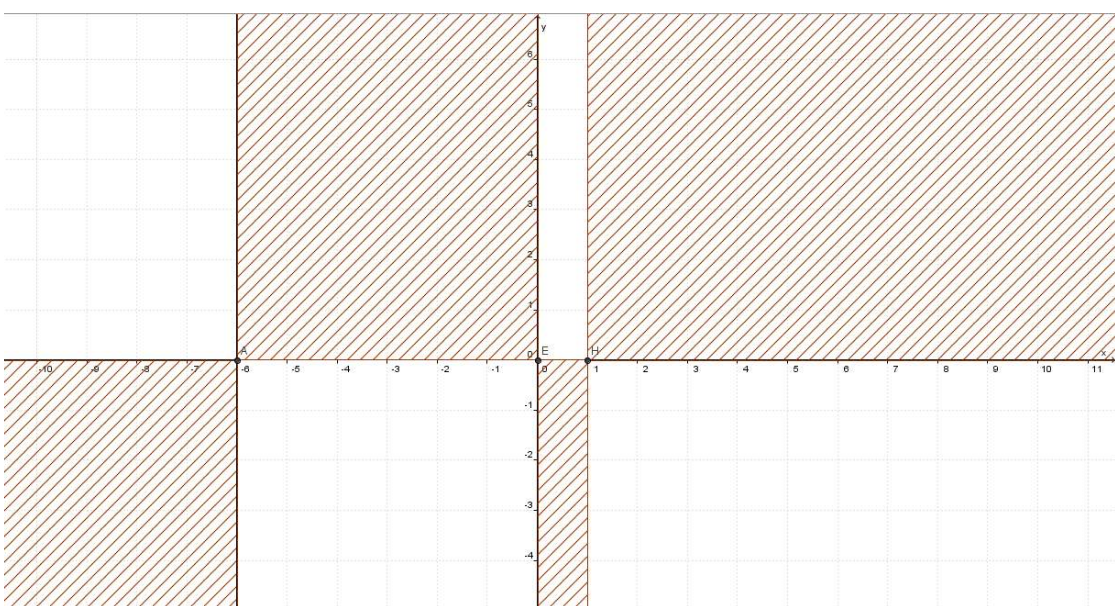
$$f(x) > 0: \quad \frac{x^2+6x}{1-x} > 0\,;$$

$$\begin{matrix} x^2+6x > 0 & \qquad & x < -6 \ \vee \ x > 0 \\ 1-x > 0 & \qquad & x < 1 \end{matrix}$$

$$\left| \begin{matrix} x^2+6x > 0 \\ \\ 1-x > 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x < -6 \ \vee \ x > 0 \\ \\ x < 1 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} f(x) > 0: & x < -6 \ \vee \ 0 < x < 1 \\ f(x) < 0: & -6 < x < 0 \ \vee \ x > 1 \end{matrix}$$



4. Considera le funzioni $f(x) = 3x$ e $g(x) = \frac{x}{2} - 5$ e scrivi l'espressione analitica di f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$ e $(f \circ g)^{-1}$.

<u>*Soluzione*</u>

Per trovare l'inversa di $y = f(x)$, *ricaviamo x in funzione di y:* $x = \frac{1}{3}y$

L'inversa di $y = f(x)$ *è* $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$.

Per trovare l'inversa di $y = g(x)$, *ricaviamo x in funzione di y:*

$y = \frac{x}{2} - 5$; $2y = x - 10$; $x = 2y + 10$.

L'inversa di $y = g(x)$ *è* $x = g^{-1}(y) = 2y + 10$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene $f^{-1}(x) = 2x + 10$.

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x}{2} - 5\right) = 3\left(\frac{x}{2} - 5\right) = \frac{3}{2}x - 15 .$$

Per trovare l'inversa di $f \circ g$ *ricaviamo x in funzione di y:*

$y = \frac{3}{2}x - 15$; $2y = 3x - 30$; $3x = 2y - 30$; $x = \frac{2}{3}y + 10$.

L'inversa di $f \circ g$ *è* $x = g^{-1}(y) = \frac{2}{3}y + 10$ . .

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene

$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + 10$.

5. Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 1$:

   a. trova la funzione inversa f^{-1}
   b. dimostra che f e f^{-1} sono funzioni crescenti.

Soluzione a

La funzione $f(x) = 2x^3 - 1$ *è una funzione razionale intera.*

Il cui dominio è $D\colon R$.

$f(x)$ *è invertibile se è biunivoca (iniettiva e suriettiva).*

$f(x)$ *iniettiva .*

Infatti, se $f(x_1) = f(x_2) \quad \longrightarrow \quad x_1 = x_2$ *:*

$2{x_1}^3 - 1 = 2{x_2}^3 - 1 \;; \qquad \longrightarrow \qquad 2{x_1}^3 = 2{x_2}^3 \;; \qquad {x_1}^3 = {x_2}^3 \;; \qquad x_1 = x_2 \,.$

$f(x)$ *suriettiva .*

Infatti ricavando x *in funzione di* y *si ha:*

$$y = 2x^3 - 1 \;; \qquad 2x^3 = y + 1 \;; \qquad x^3 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \;; \qquad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$$

Tale espressione ha significato $\forall y \in R$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene l'espressione: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$.

Soluzione b

$f(x)$ *è una funzione crescente, se* $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$:

Infatti, se $x_1 < x_2 \;; \quad {x_1}^3 < {x_2}^3 \;; \quad 2{x_1}^3 < 2{x_2}^3 \;; \quad 2{x_1}^3 - 1 < 2{x_2}^3 - 1 \;; \quad f(x_1) < f(x_2) \,.$

$f^{-1}(x)$ *è una funzione crescente, se* $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$:

Infatti, se $x_1 < x_2 \;; \quad \frac{1}{2}x_1 < \frac{1}{2}x_2 \;; \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} \;; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}} \;; \quad f(x_1) < f(x_2) \,.$

6. Data la funzione $y = f(x)$ di equazione $y = 2x - 1$, scrivi l'equazione della funzione $y = f'(x)$ ottenuta traslando la funzione $y = f(x)$ secondo il vettore $\vec{v}\,(-1\,;\,0)$ e disegna i grafici delle funzioni.

<u>Soluzione a</u>

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \end{cases}$

Le equazioni inverse sono: $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases}$

Da cui si ottiene l'equazione della funzione $y = f'(x)$ *:*

$y' = 2(x' + 1) - 1\,;$ $\quad y' = 2x' + 2 - 1\,;$ $\quad y' = 2x' + 1$

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene $y = 2x + 1$.

I grafici delle due funzioni sono sotto riportati.