Classe *3A Liceo Scientifico* *25 ottobre 2018*

Prova di Matematica : Equazioni, disequazioni e sistemi non lineari

1. La disequazione $\left\|x^2+4\right\| < -1$ □ *è sempre verificata.* □ *è verificata per* $x < -2 \ \vee \ x > 2$ □ *non è mai verificata* □ *è verificata per* $-2 < x < 2$	**2. La disequazione** $\|x\| > 3$ □ *è sempre verificata* □ *è verificata per* $-3 < x < 3$ □ *non è mai verificata* □ *è verificata per* $x < -3 \ \vee \ x > 3$

3. Indica se ogni affermazione è vera o falsa

a. *L'equazione* $\sqrt{x+2} = x$ *è equivalente a* $x + 2 = x^2$. V □ F □

b. $|x-2| \leq 0$ *non ha soluzioni.* V □ F □

c. *L'equazione* $|x| = k - |x|$, $k \in R^+$, *ha due soluzioni opposte.* V □ F □

d. *La disequazione* $\frac{3x+1}{x-2} > 0$ *è equivalente a* $\frac{2-x}{3x+1} < 0$. V □ F □

e. $-2x^5 - 5 \leq 0$ *non ha soluzioni* V □ F □

4. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x < 0$

$1 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-1}$

$|x-2| + |x-4| = x - 1$

$$\begin{cases} x^3 + 5x^2 - 6x > 0 \\ \dfrac{x}{x+2} \leq \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

5. Nel trapezio rettangolo ABCD la base maggiore AB e la base minore CD misurano rispettivamente $15\ cm$ e $12\ cm$ e l'altezza AD misura x. Prolunga i lati AD e BC e, detto P il loro punto di intersezione, determina per quali valori di x il perimetro del triangolo ABP è uguale a $60\ cm$.

SOLUZIONE

1. **La disequazione** $|x^2 + 4| < -1$

□ *non è mai verificata*

2. La disequazione $|x| > 3$

□ *è verificata per* $x < -3 \;\vee\; x > 3$

3. Indica se ogni affermazione è vera o falsa

a. *L'equazione* $\sqrt{x+2} = x$ *è equivalente a* $x + 2 = x^2$.	*F* □
b. $|x-2| \leq 0$ *non ha soluzioni.*	*F* □
c. *L'equazione* $|x| = k - |x|$, $k \in R^+$, *ha due soluzioni opposte.*	*V* □
d. *La disequazione* $\frac{3x+1}{x-2} > 0$ *è equivalente a* $\frac{2-x}{3x+1} < 0$.	*V* □
e. $-2x^5 - 5 \leq 0$ *non ha soluzioni*	*F* □

4) Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x < 0$; $\qquad x \cdot (x^3 + 2x^2 - 11x - 12) < 0$;

Scomponendo con Ruffini si ha:

$x \cdot (x+1) \cdot (x^2 + x - 12) < 0$

	1	2	-11	-12
-1		-1	-1	$+12$
	1	$+1$	-12	0

			$x<-4$	-4		-1		0		3	
$x > 0$	$x > 0$		$-$		$-$		$-$	o	$+$		$+$
$x + 1 > 0$	$x > -1$		$-$		$-$	o	$+$		$+$		$+$
$x^2 + x - 12 > 0$	$x < -4$	$\vee \quad x > 3$	$+$	o	$-$		$-$		$-$	o	$+$
			$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$-4 < x < -1 \qquad \vee \qquad 0 < x < 3$

$1 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-1}$; $\qquad$ ***C.E.:*** $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{x \geq 2}$

$1 = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$; $\qquad 1^2 = \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\right)^2$; $\qquad 1 = (x-1) + (x-2) + 2\sqrt{(x-1)(x-2)}$;

$1 = 2x - 3 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)}$; $\qquad 4 - 2x = 2\sqrt{(x-1)(x-2)}$; $\qquad 2 - x = \sqrt{(x-1)(x-2)}$;

Risolviamo $2 - x = \sqrt{(x-1)(x-2)}$

$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ (2-x)^2 = \left(\sqrt{(x-1)(x-2)}\right)^2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \boldsymbol{x \leq 2} \\ \boldsymbol{x = 2} \end{cases}$

Risolviamo $2 - x = \sqrt{(x-1)(x-2)}$;

$(2-x)^2 = \left(\sqrt{(x-1)(x-2)}\right)^2$; $\quad 4 + x^2 - 4x = x^2 - 2x - x + 2$; $\quad -x = -2$; $\quad x = 2$.

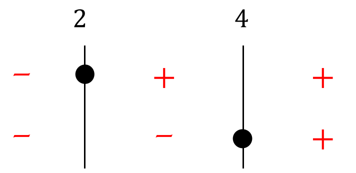
La soluzione $\boldsymbol{x = 2}$ *soddisfa entrambe le condizioni di esistenza* $\boldsymbol{x \geq 2}$ *e* $\boldsymbol{x \leq 2}$, *pertanto è accettabile.*

$|x-2|+|x-4|=x-1$

Studiamo il segno dei valori assoluti:

$x-2\geq 0 \qquad\qquad x\geq 2$

$x-4\geq 0 \qquad\qquad x\geq 4$



L'equazione è equivalente all'unione dei seguenti tre sistemi:

$$\begin{cases} x<2 \\ -(x-2)-(x-4)=x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\leq x\leq 4 \\ +(x-2)-(x-4)=x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>4 \\ +(x-2)+(x-4)=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2 \\ -x+2-x+4=x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\leq x\leq 4 \\ x-2-x+4=x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>4 \\ x-2+x-4=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2 \\ -3x=-7 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\leq x\leq 4 \\ -x=-3 \end{cases} \cup \begin{cases} x>4 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2 \\ x=\frac{7}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} 2\leq x\leq 4 \\ x=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x>4 \\ x=5 \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni accettabili sono $x=3 \quad \wedge \quad x=5$

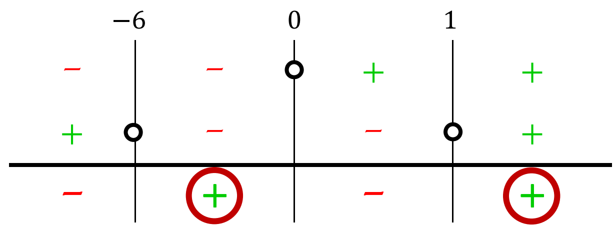
$$\begin{cases} x^3+5x^2-6x>0 \\ \dfrac{x}{x+2}\leq\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Risolviamo $x^3+5x^2-6x>0$;

$x\cdot(x^2+5x-6)>0$;

$x>0 \qquad\qquad x>0$

$x^2+5x-6>0 \qquad x<-6 \ \vee \ x>1$



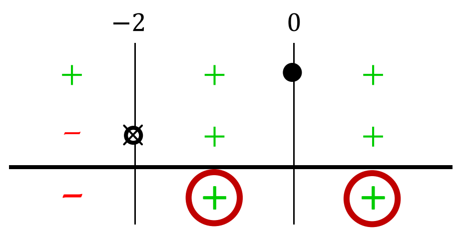
$-6<x<0 \quad \vee \quad x>1$

Risolviamo

$$\frac{x}{x+2}\leq\frac{x}{2} \ ; \qquad \frac{x}{x+2}-\frac{x}{2}\leq 0 \ ; \qquad \frac{2x-x\cdot(x+2)}{2\cdot(x+2)}\leq 0 \ ; \qquad \frac{-x^2}{2\cdot(x+2)}\leq 0 \ ; \qquad \frac{x^2}{2\cdot(x+2)}\geq 0$$

$x^2\geq 0 \qquad\qquad \forall x\in R$

$x+2>0 \qquad\qquad x>-2$



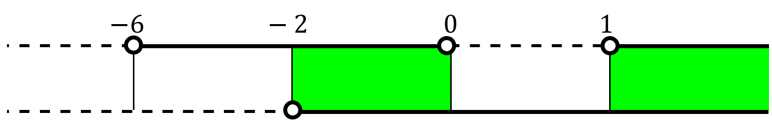
$x>-2$

Ritornando al sistema iniziale si ha:

$$\begin{cases} x^3+5x^2-6x>0 \\ \dfrac{x}{x+2}\leq\dfrac{x}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -6<x<0 \ \vee \ x>1 \\ x>-2 \end{cases}$$

$-6<x<0 \ \vee \ x>1$

$x>-2$



Pertanto le soluzioni sono $-2<x<0 \quad \vee \quad x>1$.

$$\begin{cases} x^2+y^2-x+2y-2=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$$

$Sottraendo \quad (I-II) \quad \Rightarrow \quad x+2y-2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+2y-2=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2-2y \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ (2-2y)^2+y^2-2\cdot(2-2y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 4+4y^2-8y+y^2-4+4y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 5y^2-4y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y\cdot(5y-4)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y_1=0 \\ y_2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=2-2\cdot 0 \\ y_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases}$$

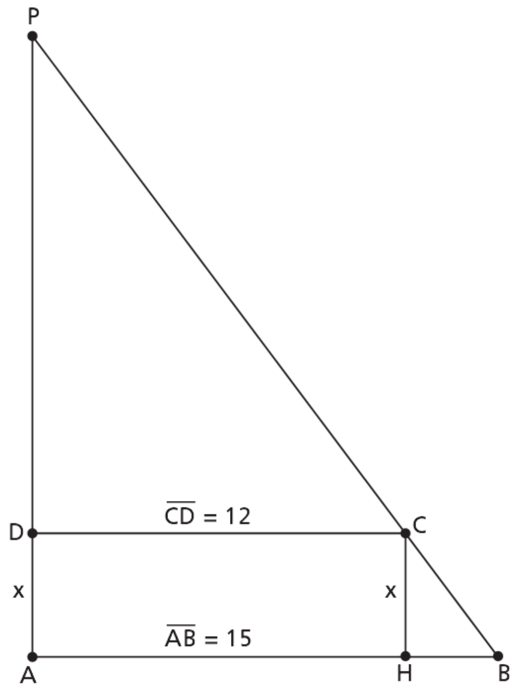
$$\begin{cases} x_1=2-2\cdot\dfrac{4}{5} \\ y_2=\dfrac{4}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{2}{5} \\ y_2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{y^2}=\dfrac{9}{4} \\ \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=0 \end{cases} \qquad Poniamo \quad \frac{1}{x^2}=a\,;\ \frac{1}{y^2}=b$$

$$\begin{cases} a+2b=\dfrac{9}{4} \\ 4a-b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a+8b=9 \\ 4a-\ b\ =0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 9b=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a-1=0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{y^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2}=\mp 2 \\ y_{1,2}=\mp 1 \end{cases} \qquad (-2\ ;\ -1)\quad (-2\,;\ +1)\quad (+2\ ;\ -1)\quad (+2\,;\ +1)$$

5. Nel trapezio rettangolo ABCD la base maggiore AB e la base minore CD misurano rispettivamente $15\ cm$ e $12\ cm$ e l'altezza AD misura x. Prolunga i lati AD e BC e, detto P il loro punto di intersezione, determina per quali valori di x il perimetro del triangolo ABP è uguale a $60\ cm$.



Soluzione

$\overline{BH}=(15-12)\ cm=3\ cm \qquad e \qquad \overline{CH}=x$.

Dai triangoli simili ABP e BCH si ottiene:

$\overline{AP}:\overline{CH}=\overline{AB}:\overline{BH}\ ; \qquad \overline{AP}:x=15:3\ ; \qquad \overline{AP}=5x$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABP si ottiene:

$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^{\,2}+\overline{AP}^{\,2}} = \sqrt{15^{\,2}+(5x)^{\,2}} = \sqrt{225+25x^{\,2}}$.

Determiniamo per quali valori di x il perimetro del triangolo ABP è uguale a $60\ cm$.

$\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{AP}=60\ ; \qquad 15+\sqrt{225+25x^{\,2}}+5x=60\,;$

$\sqrt{225+25x^{\,2}}=45-5x\,;$

$$\begin{cases} 45-5x\geq 0 \\ \left(\sqrt{225+25x^{\,2}}\right)^2=(45-5x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 9 \\ 225+25x^{\,2}=2025+25x^2-450x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 9 \\ 450x=1800 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 9 \\ x=4 \end{cases} \quad \textit{Accettabile}$$

Pertanto il perimetro del triangolo ABP è uguale a $60\ cm$ per $x=4$.