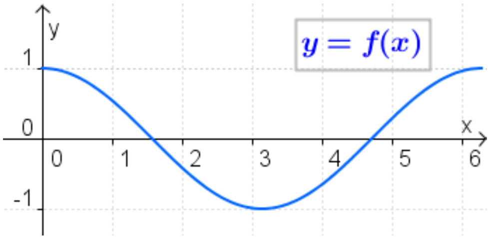
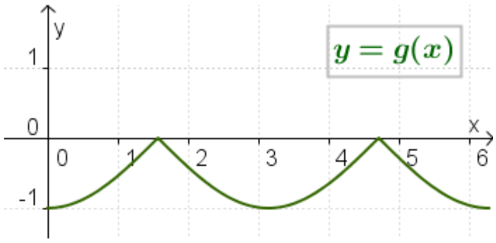
Alunno: ____ Classe: 3A L. Scientifico *19 dicembre 2018*

1. Nei grafici a lato sono rappresentate le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

   Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così disegnati?





□ $g(x) = |f(x)|$ □ $g(x) = |-f(x)|$ □ $g(x) = -|f(x)|$

□ $g(x) = f(|x|)$ □ $g(x) = -f(|x|)$ □ $g(x) = f(|-x|)$

2. Determina l'equazione della curva simmetrica di quella di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ rispetto:

   a. all'asse x
   b. alla retta di equazione $x = 2$
   c. rispetto all'origine degli assi cartesiani
   d. alla bisettrice del I e III quadrante

3. I punti $A(1\,;\,-2)$ e $A'(2\,;\,-4)$ si corrispondono in una traslazione. Determina:
   a. le equazioni della traslazione;
   b. le componenti del vettore di traslazione;
   c. l'equazione della funzione $y = f'(x)$ ottenuta traslando la funzione $y = f(x)$ di equazione $y = -3x^2 + 1$ secondo il vettore trovato;
   d. i grafici delle funzioni $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = |f(x)|$.

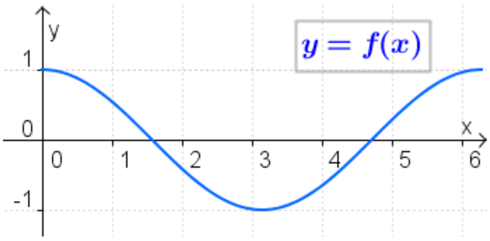
4. Calcola la somma: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ . \ . \ . \ +2^2 - 1$

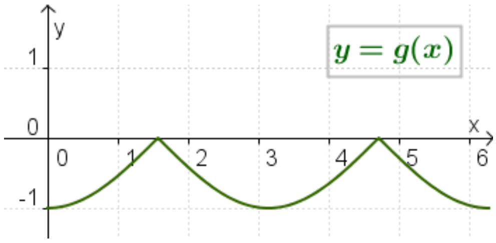
5. Partendo da 2, quanti numeri pari consecutivi si devono sommare per ottenere 1260 ?

Soluzione

1. Nei grafici a lato sono rappresentate le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

   Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così disegnati?





   □ $g(x) = -|f(x)|$

2. Determina l'equazione della curva simmetrica di quella di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ rispetto:

   a. all'asse x

   b. alla retta di equazione $x = 2$

   c. rispetto all'origine degli assi cartesiani

   d. alla bisettrice del I e III quadrante

<u>Soluzione a</u>

Le equazioni della simmetria rispetto all'asse x sono: $S: \begin{cases} x' = +x \\ y' = -y \end{cases}$ *da cui si ottengono* $S^{-1}: \begin{cases} x = +x' \\ y = -y' \end{cases}$

Si ricava: $x'^2 + y'^2 - 2x' - 1 = 0$.

<u>Soluzione b</u>

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione $x = 2$ sono: $S: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 2 \cdot 2 - x \\ y' = y \end{cases}$

da cui si ottengono $S^{-1}: \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = y' \end{cases}$

Si ricava: $(4 - x')^2 + y'^2 - 2(4 - x') - 1 = 0$; $16 + x'^2 - 8x' + y'^2 - 8 + 2x' - 1 = 0$;
$x'^2 + y'^2 - 6x' + 7 = 0$.

<u>Soluzione c</u>

Le equazioni della simmetria rispetto all'origine degli assi cartesiani sono: $S: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

da cui si ottengono $S^{-1}: \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$

Si ricava: $x'^2 + y'^2 + 2x' - 1 = 0$;

<u>Soluzione d</u>

Le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante *sono:* $S: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

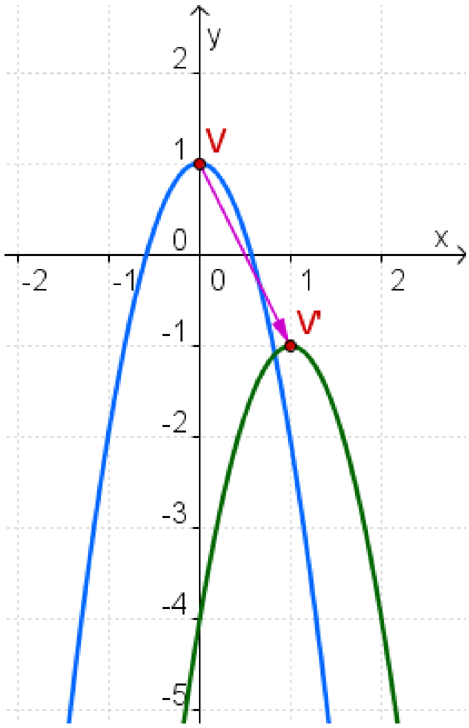
da cui si ottengono $S^{-1}: \begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases}$

Si ricava: $x'^2 + y'^2 - 2y' - 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{ll} a:\ x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 & b:\ x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0 \\ c:\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 & d:\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{array} \right]$$

I punti $A(1\,;\,-2)$ e $A'(2\,;\,-4)$ si corrispondono in una traslazione. Determina:

a. le equazioni della traslazione;
b. le componenti del vettore di traslazione;
c. l'equazione della funzione $y=f'(x)$ ottenuta traslando la funzione $y=f(x)$ di equazione $y=-3x^2+1$ secondo il vettore trovato;
d. i grafici delle funzioni $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=|f(x)|$.



<u>*Soluzione*</u>

Dalle equazioni della traslazione $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

si ricavano i due parametri a *e* b*:*

$\begin{cases} +2=+1+a \\ -4=-2+b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a=+1 \\ b=-2 \end{cases}$

Le equazioni della traslazione sono: $T:\ \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-2 \end{cases}$

Il vettore traslazione è $\vec{v}=(1\,;\,-2)$.

Dalle equazioni della traslazione si ottiene: $T^{-1}:\ \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+2 \end{cases}$

Sostituendo si ha:

$y'+2=-3(x'-1)^2+1\,;$

$y'+2=-3\left(x'^2+1-2x'\right)+1\,;$

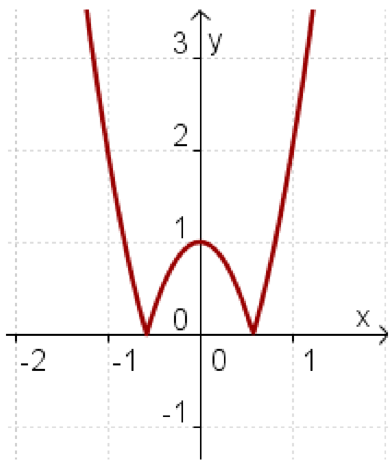
$y'+2=-3x'^2-3+6x'+1\,;$

$y'=-3x'^2+6x'-4\,;$

Utilizzando le variabili x *e* y *si ha:*

$y=-3x^2+6x-4$

I grafici sono rappresentati a lato:



4. Calcola la somma: $100^2-99^2+98^2-97^2+\ .\ .\ .\ +2^2-1$

<u>*Soluzione*</u>

$$
\begin{aligned}
S &= 100^2-99^2+98^2-97^2+\ .\ .\ .\ +2^2-1 = \\
&= (100^2+98^2+\ .\ .\ .\ +2^2)-(99^2+97^2+\ .\ .\ .\ +3^2+1^2) = \\
&= 50\cdot\frac{p_1+p_{50}}{2}-50\cdot\frac{d_1+d_{50}}{2} = 50\cdot\frac{4+100^2}{2}-50\cdot\frac{1+99^2}{2} = \\
&= 25\cdot[4+100^2-(1+99^2)] = 25\cdot(3+100^2-99^2) = \\
&= 25\cdot[3+(100+99)\cdot(100-99)] = 25\cdot[3+199] = 5050\ .
\end{aligned}
$$

5. Partendo da 2, quanti numeri pari consecutivi si devono sommare per ottenere 1260 ? *[Kangourou, 2003]*

<u>*Soluzione*</u>

$a_1=2\,,\ a_2=4\,,\ a_3=6\,,\ .\ .\ .\ a_n=2n\ .$

$S_n=n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2}\,;\qquad 1260=n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2}\,;\qquad 1260=n\cdot\dfrac{2+2n}{2}\,;\qquad 1260=n\cdot\dfrac{2\cdot(1+n)}{2}\,;$

$n\cdot(1+n)=1260\,;\qquad n^2+n-1260=0\,;$

$\Delta=1+5040=5041\,;\qquad n_{1,2}=\dfrac{-1\mp\sqrt{5041}}{2}=\begin{matrix} n_1=\frac{-1-71}{2}=-36 \\ n_2=\frac{-1+71}{2}=+35 \end{matrix}\qquad\Rightarrow\qquad n=35$ *(perché* $n\in N$*)* .