Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

Alunno: ____ *Classe: 3A* *L. Scientifico* *12 marzo 2019*

Dato il fascio di rette di equazione $(k+3)x-(k+2)y-5-k=0$,

a. determina la natura del fascio, individuando l'eventuale centro;

b. determina le equazioni delle rette generatrici;

c. determina le equazioni delle rette del fascio parallele agli assi cartesiani;

d. studia come variano le rette del fascio al crescere di k;

e. determina per quale valore di a il baricentro del triangolo ABC , di vertici $A(0\,;0)$, $B(a\,;\,0)$, $C(3\,;\,2)$, appartiene alla retta di equazione $3x+3y-13=0$;

f. determina per tale valore di a il circocentro del triangolo ABC;

g. determina le coordinate dei vertici del rettangolo inscritto nel triangolo ABC, con due vertici sul lato AB, tale che il lato su AB sia doppio dell'altro lato consecutivo.

Soluzione

Essendo il coefficiente angolare del fascio $m_f = -\frac{a}{b} = -\frac{k+3}{-(k+2)} = \frac{k+3}{k+2}$ *dipendente dal parametro* k *, il fascio è proprio.*

Riscriviamo l'equazione nella forma di combinazione lineare:

$kx + 3x - ky - 2y - 5 - k = 0$;

$3x - 2y - 5 + k(x - y - 1) = 0$.

Le equazioni delle rette generatrici sono:

Per $k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x - 2y - 5 = 0$;

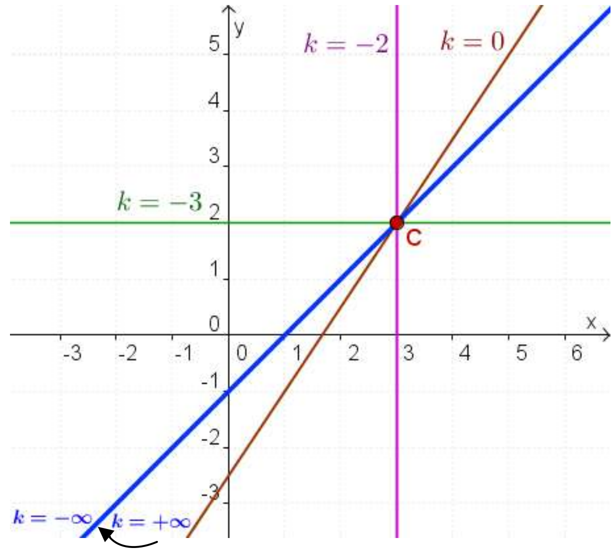
$\nexists\, k \in R \;\; (k = \infty) \qquad \Rightarrow \qquad x - y - 1 = 0$;

Le coordinate del centro del fascio si ottengono risolvendo il Sistema formato dalle equazioni delle rette generatrici:

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 1 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ 3(y+1) - 2y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 3y + 3 - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C(3\,;\,2)$



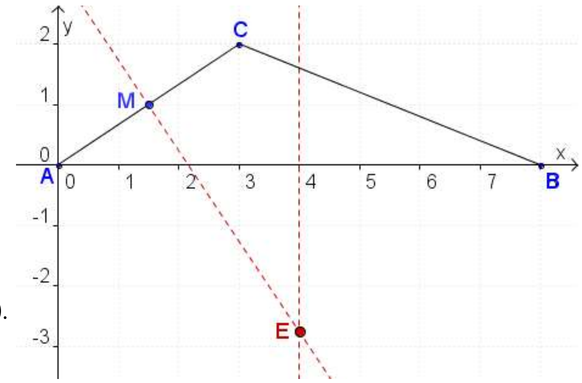
Le rette del fascio parallele agli assi cartesiani hanno equazioni:

Per $k = -3 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2$

Per $k = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3$

Le coordinate del baricentro $\boldsymbol{G}$ *del triangolo sono:*

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0 + a + 3}{3} \qquad \Rightarrow \qquad G\left(\frac{a+3}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0 + 0 + 2}{3}$$



Imponiamo il passaggio della retta $3x + 3y - 13 = 0$ *per il punto G:*

$3 \cdot \frac{a+3}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 13 = 0\ ; \qquad a + 3 + 2 - 13 = 0\ ; \qquad a = 8\ .$

Pertanto il baricentro ha coordinate $G\left(\frac{11}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$ *e il vertice* $C\ (8\ ;\ 0)$.

L'asse del lato AB ha equazione: $x = 4$.

Il punto medio del lato AC ha equazione: $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ 1\right)$.

Il coefficiente angolare $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$.

L'asse del lato AC ha equazione: $y - y_M = -\frac{1}{m_C}(x - x_M)\ ; \quad y - 1 = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\ ; \qquad y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$.

Le coordinate del circocentro sono:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{13}{4} = -\frac{12}{2} + \frac{13}{4} = \frac{-24+13}{4} = -\frac{11}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad E\left(4\ ;\ -\frac{11}{4}\right)\ .$$

Sull'asse x prendiamo il punto $P\ (k\ ;\ 0)$ *, con* $0 < k < 3$.

Il punto S appartenendo alla retta AC di equazione $y = \frac{2}{3}x$ *ha coordinate* $S\left(k\ ;\ \frac{2}{3}k\right)$.

La retta BC ha equazione: $\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}\ ; \quad \frac{y-0}{2-0} = \frac{x-8}{3-8}\ ; \quad \frac{y}{2} = \frac{x-8}{-5}\ ; \quad -5y = 2(x-8)\ ; \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$.

La retta SR ha equazione: $y = \frac{2}{3}k$

Il punto R ha coordinate:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}k \\ y = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \frac{2}{3}k = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \\ 10k = -6x + 48 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ 6x = 48 - 10k \end{cases} \quad \begin{cases} \\ x = 8 - \frac{5}{3}k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R\left(8 - \frac{5}{3}k\ ;\ \frac{2}{3}k\right).$$

La lunghezza del lato PS è : $\overline{PS} = |y_S - y_P| = \left|\frac{2}{3}k - 0\right| = \frac{2}{3}k$ *(perché* $k > 0$*)* .

La lunghezza del lato SR è : $\overline{SR} = |x_R - x_S| = \left|8 - \frac{5}{3}k - k\right| = \left|8 - \frac{8}{3}k\right| = 8 - \frac{8}{3}k$ *(perché* $0 < k < 3$ *).*

Imponiamo che sia: $\overline{SR} = \overline{PS}\ ; \qquad 8 - \frac{8}{3}k = 2 \cdot \frac{2}{3}k\ ;$

$8 - \frac{8}{3}k = \frac{4}{3}k\ ; \quad 24 - 8k = 4k\ ; \quad 12k = 24\ ; \quad k = 2\ .$

Pertanto i vertici hanno coordinate:

$P(2\ ;\ 0)\ , \quad S\left(2\ ;\ \frac{4}{3}\right)\ , \quad R\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)\ , \quad Q\left(\frac{14}{3}\ ;\ 0\right).$