Prova di Matematica : Parabola

Dato il fascio di parabole di equazione $kx^2 - y + (1-2k)x - 3k - 2 = 0$:

a. studia le caratteristiche del fascio e determina i punti base ;
b. determina l'equazione della retta $\boldsymbol{s}$ secante a tutte le parabole del fascio (*parabola degenere*) ;
c. determina la parabola $\boldsymbol{\gamma}$ del fascio avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = \frac{3}{4}$;
d. determina l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola $\boldsymbol{\gamma}$ e dalla retta $\boldsymbol{s}$;
e. determina l'area del quadrilatero $\boldsymbol{AOBC}$, essendo $\boldsymbol{C}$ il punto di intersezione di $\boldsymbol{\gamma}$ con l'asse delle y .

Soluzione

Soluzione a

Determiniamo la forma canonica:
$y = kx^2 + (1-2k)x - 3k - 2$

Determiniamo le coordinate del vertice :

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1-2k}{2k} = \frac{2k-1}{2k}$$

$$y_V = k\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + (1-2k)\frac{2k-1}{2k} - 3k - 2 = \frac{(2k-1)^2}{4k} - \frac{(2k-1)^2}{2k} - 3k - 2 = \frac{4k^2+1-4k-8k^2-2+8k-12k^2-8k}{4k} =$$

$$= \frac{-16k^2-4k-1}{4k}$$

$\Rightarrow \quad V\left(\frac{2k-1}{2k}; \frac{-16k^2-4k-1}{4k}\right)$ *Il vertice dipende dal parametro k .*

Pertanto le parabole del fascio hanno il vertice variabile e l'asse di simmetria variabile .

Studiamo la concavità:

Se $k > 0 \longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso l'alto.

Se $k < 0 \longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso il basso.

Se $k = 0 \longrightarrow$ la parabola è degenere: retta $y = x - 2$.

Determiniamo le parabole generatrici:
Scriviamo il fascio di parabole come combinazione lineare:

$kx^2 - y + (1-2k)x - 3k - 2 = 0\,;$ $\qquad kx^2 - y + x - 2kx - 3k - 2 = 0$

$-y + x - 2 + k\cdot(x^2 - 2x - 3) = 0\,;$

Le parabole generatrici hanno equazione:

$k = 0 \quad \longrightarrow \quad y = x - 2$ *la parabola è degenere*

$k \to \infty \quad \longrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0\,; \quad (x+1)(x-3) \quad \begin{matrix} x = -1 \\ x = +3 \end{matrix}$ *coppia di rette verticali*

Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = +3 \\ y_2 = +1 \end{cases} \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad A(-1;-3) \quad B(3;1)$$

Il fascio ha due punti base.
Le parabole sono tutte secanti nei punti base.

Disegniamo alcune parabole del fascio:

Soluzione b

l'equazione della retta s secante a tutte le parabole del fascio è $y = x - 2$.

Soluzione c

La parabola $\boldsymbol{\gamma}$ del fascio avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = \frac{3}{4}$ si ottiene ponendo $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$

$-\frac{1-2k}{2k} = \frac{3}{4}\,; \qquad \frac{2k-1}{2k} = \frac{3}{4}\,; \qquad 4(2k-1) = 3\cdot 2k\,; \qquad 8k - 4 = 6k\,; \qquad 2k = 4\,; \qquad k = 2$.

La parabola $\boldsymbol{\gamma}$ ha equazione:

$y = 2x^2 + (1 - 2\cdot 2)x - 3\cdot 2 - 2\,;$ $\qquad \boldsymbol{y = 2x^2 - 3x - 8}$.

$x_V = -\frac{-3}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}\,;$ $\qquad y_V = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{4} - 8 = 2\cdot\frac{9}{16} - \frac{9}{4} - 8 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 8 = \frac{9-18-64}{8} = -\frac{73}{8}$

$\Rightarrow \quad V\left(\frac{3}{4}\,; -\frac{73}{8}\right)$.

<u>*Soluzione d*</u>

L'equazione della retta secante s è: $y = x - 2$.

Determiniamo l'equazione della retta tangente $\boldsymbol{t}$ *alla parabola parallela alla retta secante s :*

$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x - 8 \\ y = x + q \end{cases}$ $\quad \begin{cases} - \\ 2x^2 - 3x - 8 = x + q \end{cases}$ $\quad \begin{cases} - \\ 2x^2 - 4x - 8 - q = 0 \end{cases}$

Imponiamo la condizione di tangenza: $\frac{\Delta}{4} = 0$;

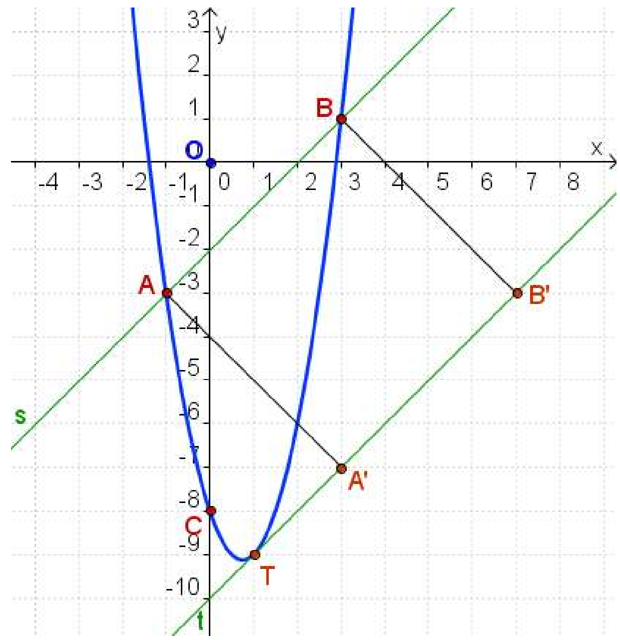
$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4c = 0$; $\quad (-2)^2 - 2 \cdot (-8 - q) = 0$;

$4 + 16 + 2q = 0$; $\quad 2q = -20$; $\quad q = -10$.

La retta tangente $\boldsymbol{t}$ *ha equazione:* $y = x - 10$.

In forma implicita: $x - y - 10 = 0$.

La misura della base AB del rettangolo $AA'B'B$ *è :*



$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$

$= \sqrt{(-1-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

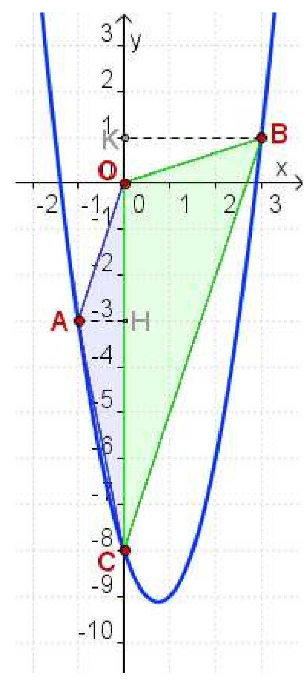
La misura dell'altezza AA' *è :*

$\overline{AA'} = d(A\,, t) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$

$= \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1 + 3 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$.

L'area del segmento parabolico è :

$S_{ABT} = \frac{2}{3} \cdot S_{ABB'A'} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AA'} = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{64}{3}$.



<u>*Soluzione e*</u>

Il punto C ha coordinate $C(-8\,;\,0)$

$\overline{OC} = |y_O - y_C| = |0 - (-8)| = 8$.

$\overline{AH} = |x_H - x_A| = |0 - (-1)| = 1$.

$\overline{BK} = |x_B - x_K| = |3 - 0| = 3$.

L'area del quadrilatero AOBC è :

$S_{AOBC} = S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{AH} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{BK} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 16$.