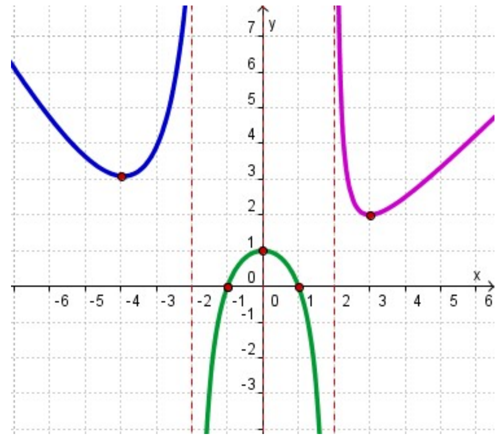
Prova di Matematica : Equazioni disequazioni e sistemi

Alunno: ____ *Classe: 3A* *L. Scientifico* *19 dicembre 2018*

1. Della funzione $f(x)$ rappresentata a lato determina:
   a. *Dominio:* ____
   b. *Codominio:* ____
   c. $f(x) = 0$ ________________________________
   d. $f(x) < 0$ ________________________________
   e. $f(x)$ *è decrescente* ______________________
   f. $f(-2) =$ ____________________________________
   g. $f(\quad) = 2$



2. Determina il dominio delle seguenti funzioni:
   $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x^3 + 2x^2 - 8x - 4}}$ $\qquad$ $y = \sqrt{1 - |x^2 - 2|}$ $\qquad$ $y = \sqrt{2 + x - \sqrt{4 - 9x^2}}$

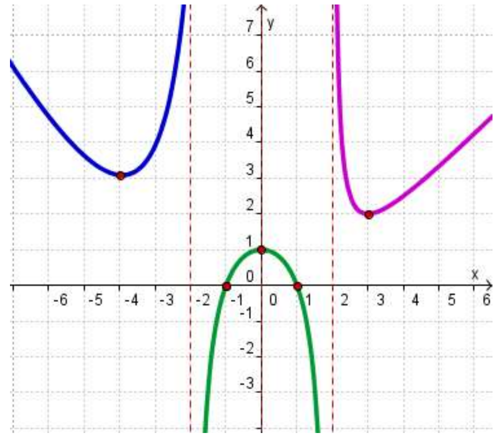
3. Data la funzione $f(x) = \frac{3x+2}{4}$, verifica che è invertibile, determina l'espressione analitica della funzione inversa e traccia i grafici di $f(x)$ e di $f^{-1}(x)$.

4. Determina il codominio della funzione $y = 5 - \sqrt{9 - x^2}$.

5. Traccia il grafico della funzione $f(x) = |x - 3| - \frac{x+1}{|x+1|}$.

Soluzione

1. Della funzione $f(x)$ rappresentata a lato determina:



   a. $D\colon x \neq \mp 2$

   b. $C\colon \,]-\infty\,,1] \;\cup\; [2\,,+\infty[$

   c. $f(x) = 0 \;\; per \;\; x = \mp 1$

   d. $f(x) < 0 \;\;]-2\,,-1] \;\cup\; [1\,,+2[$

   e. $f(x)$ *è decrescente in* $]-\infty\,,4\,[\;\cup\;]0\,,2\,[\;\cup\;]2\,,3\,[$

   f. $f(-2) = \nexists$

   g. $f(3) = 2$

2. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x^3+2x^2-8x-4}} \qquad y = \sqrt{1-|x^2-2|} \qquad y = \sqrt{2+x-\sqrt{4-9x^2}}$$

Soluzione 1

$$y = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x^3+2x^2-8x-8}}\;;$$

$2x^3+2x^2-8x-8>0\,;\qquad 2(x^3+x^2-4x-4)>0\,;$

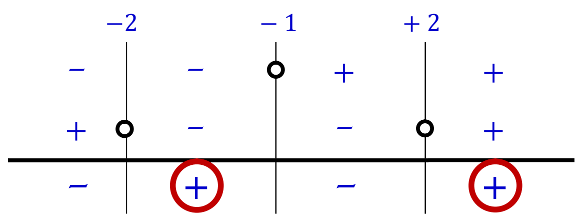
Scomponendo con Ruffini si ha:

	1	$+1$	-4	-4
-1		-1	0	$+4$
	1	0	-4	0

$2(x+1)\cdot(x^2-4)>0$

$x+1>0 \qquad\qquad x>-1$

$x^2-4>0 \qquad\qquad x<-2 \;\;\vee\;\; x>2$



$D\colon\;\;]-2\,,-1[\;\;\cup\;\;]+2\,,+\infty[$

Soluzione 2

$y = \sqrt{1-|x^2-2|}$

$1-|x^2-2|\geq 0\,;\quad |x^2-2|\leq 1\,;\quad \begin{cases} x^2-2\geq -1 \\ x^2-2\leq +1\end{cases} \quad \begin{cases} x^2\geq 1 \\ x^2\leq 3\end{cases} \quad \begin{cases} x\leq -1 \;\;\vee\;\; x\geq 1 \\ -\sqrt{3}\leq x\leq +\sqrt{3}\end{cases}$

$-\sqrt{3}\leq x\leq -1 \qquad \vee \qquad 1\leq x\leq \sqrt{3}$

Soluzione 3

$y = \sqrt{2+x-\sqrt{4-9x^2}}$

$2+x-\sqrt{4-9x^2}\;\geq 0\,; \qquad\qquad 2+x\geq \sqrt{4-9x^2}\;;$

$$\begin{cases} 2+x\geq 0 \\ 4-9x^2\geq 0 \\ (2+x)^2\geq 4-9x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -2 \\ -\dfrac{2}{3}\leq x\leq \dfrac{2}{3} \\ x\leq -\dfrac{2}{5} \;\;\vee\;\; x\geq 0 \end{cases} \qquad -\frac{2}{3}\leq x\leq -\frac{2}{5} \quad \vee \quad 0\leq x\leq \frac{2}{3}$$

$(2+x)^2\geq 4-9x^2\,; \qquad 4+x^2+4x\geq 4-9x^2\,; \qquad 10x^2+4x\geq 0\,; \qquad x\leq -\frac{2}{5} \;\;\vee\;\; x\geq 0$

3. Data la funzione $f(x) = \frac{3x+2}{4}$, verifica che è invertibile, determina l'espressione analitica della funzione inversa e traccia i grafici di $f(x)$ e di $f(x)^{-1}$.

<u>*Soluzione*</u>

Verifichiamo se $f(x)$ è invertibile.

Iniettiva: occorre verificare che se $f(x_1) = f(x_2)$ *allora* $x_1 = x_2$.

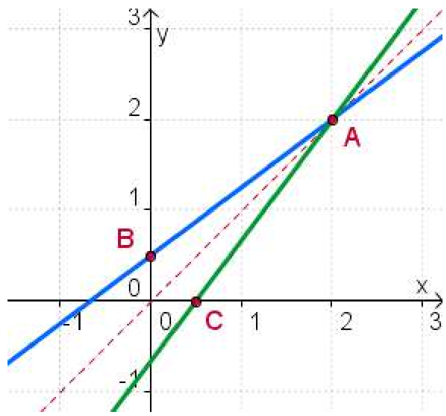
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{3x_1+2}{4} = \frac{3x_2+2}{4} \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 3x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

Suriettiva: occorre verificare che $f^{-1}(x)$ *esiste* $\forall\, y \in R$.

$y = \frac{3x+2}{4}$; $\quad 3x + 2 = 4y$; $\quad 3x = 4y - 2$; $\quad x = \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}$ *funzione che esiste* $\forall\, y \in R$.

L'espressione analitica della funzione inversa è $f^{-1}(x) = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.

I grafici delle due funzioni sono sotto rappresentati:



4. *Determina il codominio della funzione* $y = 5 - \sqrt{9 - x^2}$.

<u>*Soluzione*</u>

Occorre trovare l'insieme dei valori della variabile y *che sono immagine di un valore* x *del dominio.*

Il dominio della funzione è $D = [-3\ ;\ +3\,]$.

Riscriviamo la funzione esplicitando la sua equazione rispetto alla variabile x.

$\sqrt{9 - x^2} = 5 - y$

$$\begin{cases} 5 - y \geq 0 \\ 9 - x^2 = (5 - y)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq 5 \\ 9 - x^2 = 25 + y^2 - 10y \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq 5 \\ x^2 = -y^2 + 10y - 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq 5 \\ x = \mp\sqrt{-y^2 + 10y - 16} \end{cases}$$

La variabile x *esiste per* $\begin{cases} y \leq 5 \\ -y^2 + 10y - 16 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2 \leq y \leq 5$

Risolvo: $y^2 - 10y + 16 \leq 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 25 - 16 = 9$; $\quad y_{1,2} = 5 \mp 3 = \begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = 8 \end{matrix} \qquad 2 \leq y \leq 8$

Pertanto il codominio è l'insieme $C = [\,2\ ;\ 5\,]$.

5. *Traccia il grafico della funzione* $f(x) = |x-3| - \frac{x+1}{|x+1|}$ *determinando: dominio, codominio, punti di intersezione del grafico con gli assi, segno e intervalli in cui è crescente e in cui è decrescente.*

<u>Soluzione</u>

La funzione è una funzione algebrica razionale fratta contenente valori assoluti.

Il dominio della funzione è D: $]-\infty\,, -1\,[\quad \cup \quad]-1\,, +\infty\,[$

Studiamo il segno dei valori assoluti:

			-1		$+3$	
$x-3 \geq 0$	$x \geq +3$			$-$	$\bullet$	$+$
$x+1 > 0$	$x > -1$		$\otimes$	$+$		$+$

La sua equazione è equivalente a:

$$y = |x-3| - \frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} -(x-3) - \frac{x+1}{-(x+1)} & se \;\; x < -1 \\ -(x-3) - \frac{x+1}{+(x+1)} & se \;\; -1 < x \leq 3 \\ +(x-3) - \frac{x+1}{+(x+1)} & se \;\; x > 3 \end{cases}$$

$$y = |x-3| - \frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} -x+3+1 & se \;\; x < -1 \\ -x+3-1 & se \;\; -1 \leq x \leq 3 \\ +x-3-1 & se \;\; x > 3 \end{cases}$$

$$y = |x-3| - \frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} -x+4 & se \;\; x < -1 \\ -x+2 & se \;\; -1 \leq x \leq 3 \\ +x-4 & se \;\; x > 3 \end{cases}$$

Il grafico è sotto rappresentato: