

1. Risolvi il seguente sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} x^2 < (x+1)^2 \\ 5-x \geq 0 \\ \frac{1}{3}[x-(3x-1)] > \frac{1}{2} \end{cases}$$
2. Il sistema $\begin{cases} ax - by = 1 \\ 3ax - by = 2 \end{cases}$ ammette la soluzione $(1; -2)$. Determina a e b .
3. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con il metodo grafico e con un altro metodo a tua scelta:
- $$\begin{cases} 2 + 4x^2 = (2x-1)^2 - 6y \\ \frac{1}{3} - y = \frac{2}{3}x \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 + \frac{(2-y)(y-2)}{4} = -\frac{x-1}{2} \\ x^2 + y = (3-x)^2 \end{cases}$$
4. Risolvi e discuti il seguente sistema di equazioni nelle incognite x e y :
$$\begin{cases} ax - a^2 = 1 - y \\ a^2x - 2a + \frac{y}{a} = 0 \end{cases}$$
5. Un capitale di 60 000 € viene impiegato in tre diverse forme di investimento. La prima frutta un interesse annuo del 4%, la seconda frutta un interesse annuo del 6%, la terza frutta un interesse annuo del 8%. Il capitale investito nella prima forma di investimento è il doppio di quello investito complessivamente nella seconda e nella terza forma. Dopo un anno il capitale frutta complessivamente un interesse di 2900 €. Quali sono le somme di capitale investite nelle tre forme?
6. Un rappresentante di commercio può scegliere tra due tipi di contratto:
- Contratto A: stipendio mensile fisso di 700 € più una percentuale del 6% sulle vendite effettuate in un mese;
 - Contratto B: stipendio mensile fisso di 600 € più una percentuale del 8% sulle vendite effettuate in un mese.
- Sotto quali condizioni il contratto A è migliore del contratto B?

Soluzione

1. Risolvi il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 < (x+1)^2 \\ 5-x \geq 0 \\ \frac{1}{3}[x-(3x-1)] > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 < x^2+1+2x \\ x \leq 5 \\ \frac{1}{3}[x-3x+1] > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -2x < +1 \\ x \leq 5 \\ \frac{1}{3}[-2x+1] > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > -1 \\ x \leq 5 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > -1 \\ x \leq 5 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \leq 5 \\ -4x+2 > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \leq 5 \\ -4x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \leq 5 \\ 4x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \leq 5 \\ x < -\frac{1}{4} \end{cases} \quad -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}$$

2. Il sistema $\begin{cases} ax - by = 1 \\ 3ax - by = 2 \end{cases}$ ammette la soluzione $(1; -2)$. Determina a e b .

$$\begin{cases} a \cdot 1 - b \cdot (-2) = 1 \\ 3a \cdot 1 - b \cdot (-2) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \quad (II - I) \Rightarrow \quad 2a = 1; \quad a = \frac{1}{2}$$

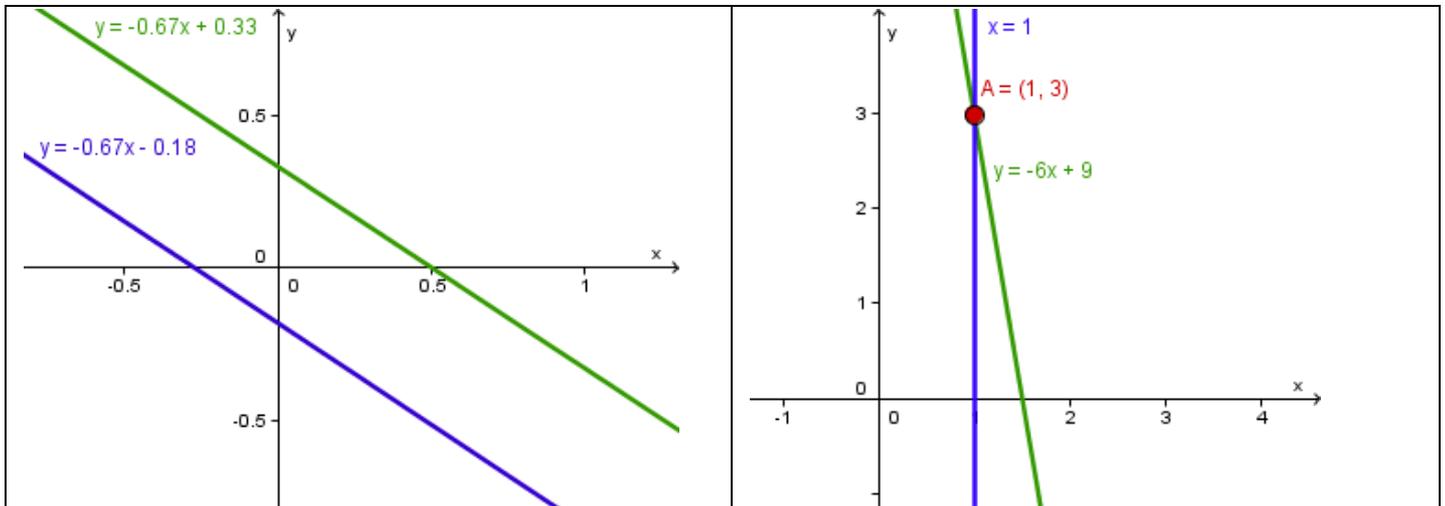
$$3 \cdot \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + 6b = 3 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \quad (I - II) \Rightarrow \quad 4b = 1; \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\left(a = \frac{1}{2}; \quad b = \frac{1}{4} \right)$$

3. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con il metodo grafico e con un altro metodo a tua scelta:

$$\begin{cases} 2 + 4x^2 = (2x-1)^2 - 6y \\ \frac{1}{3} - y = \frac{2}{3}x \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + 4x^2 = 4x^2 + 1 - 4x - 6y \\ 1 - 3y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 6y = -1 \\ -2x - 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 6y = -1 \\ 2x + 3y = +1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{4}{2} = 2 \right) = \left(\frac{b}{b'} = \frac{6}{3} = 2 \right) \neq \left(\frac{c}{c'} = \frac{-1}{+1} = -1 \right) \quad \text{Sistema impossibile.}$$



$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}y - 1 \right)^2 + \frac{(2-y)(y-2)}{4} = -\frac{x-1}{2} \\ x^2 + y = (3-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y^2 + 1 - y + \frac{2y-4-y^2+2y}{4} = -\frac{x-1}{2} \\ x^2 + y = 9 + x^2 - 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 4 - 4y + 2y - 4 - y^2 + 2y = -2(x-1) \\ 6x + y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 2y + 2y = -2x + 2 \\ 6x + y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 0y = 2 \\ 6x + y = 9 \end{cases} \quad \left(\frac{a}{a'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{0}{1} = 0 \right) \quad \text{Sistema determinato.}$$

$$\begin{cases} 2x = 2 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 6 \cdot 1 + y = 9 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9 - 6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

4. Risolvi e discuti il seguente sistema di equazioni nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} ax - a^2 = 1 - y \\ a^2x - 2a + \frac{y}{a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y = a^2 + 1 \\ a^2x + \frac{y}{a} = 2a \end{cases} \quad \text{C.E. (p): } a \neq 0$$

$$\begin{cases} ax + 1y = a^2 + 1 \\ a^3x + 1y = 2a^2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^3 & 1 \end{vmatrix} = a - a^3 = a \cdot (1 - a^2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 + 1 & 1 \\ 2a^2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 - 2a^2 = 1 - a^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a^2 + 1 \\ a^3 & 2a^2 \end{vmatrix} = 2a^3 - a^3 \cdot (a^2 + 1) = 2a^3 - a^5 - a^3 = a^3 - a^5 = a^3 \cdot (1 - a^2)$$

$$\text{Se } D \neq 0 \text{ cioè } a \cdot (1 - a^2) \neq 0; \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq \mp 1 \end{matrix} \Rightarrow \left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{1 - a^2}{a \cdot (1 - a^2)} = \frac{1}{a}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{a^3 \cdot (1 - a^2)}{a \cdot (1 - a^2)} = a^2 \right)$$

$$\text{Se } D = 0 \text{ cioè } a \cdot (1 - a^2) = 0; \quad \begin{matrix} a = 0 \text{ NO C.E. (p)} \\ a = \mp 1 \end{matrix}$$

$$\text{se } a = -1 \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Sistema indeterminato}$$

$$\text{se } a = +1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Sistema indeterminato}$$

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a = 0$	Perde significato	-
$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq \pm 1$	Sistema determinato	$\left(\frac{1}{a}; a^2\right)$
$a = \pm 1$	Sistema indeterminato	∞ soluzioni

5. Un capitale di 60 000 € viene impiegato in tre diverse forme di investimento. La prima frutta un interesse annuo del 4%, la seconda frutta un interesse annuo del 6%, la terza frutta un interesse annuo del 8%. Il capitale investito nella prima forma di investimento è il doppio di quello investito complessivamente nella seconda e nella terza forma. Dopo un anno il capitale frutta complessivamente un interesse di 2900 €. Quali sono le somme di capitale investite nelle tre forme?

Soluzione

Poniamo la I^a Somma = x II^a Somma = y III^a Somma = z con $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} x + y + z = 60000 \\ \frac{4}{100}x + \frac{6}{100}y + \frac{8}{100}z = 2900 \\ x = 2 \cdot (y + z) \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 60000 \\ 4x + 6y + 8z = 290000 \\ x = 2 \cdot (y + z) \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 60000 \\ 2x + 3y + 4z = 145000 \\ x = 2 \cdot (y + z) \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ x = 2y + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 2z + y + z = 60000 \\ 2 \cdot (2y + 2z) + 3y + 4z = 145000 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + 3z = 60000 \\ 4y + 4z + 3y + 4z = 145000 \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = 20000 \\ 7y + 8z = 145000 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 20000 - z \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \cdot (20000 - z) + 8z = 145000 \end{cases} \quad \begin{cases} 140000 - 7z + 8z = 145000 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 145000 - 140000 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5000 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20000 - 5000 = 15000 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ x = 2 \cdot 15000 + 2 \cdot 5000 = 40000 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40000 \\ y = 15000 \\ z = 5000 \end{cases}$$

Le tre somme di capitale investite nelle tre forme sono:

$$I^a \text{ Somma} = 40\,000 \text{ €} \quad II^a \text{ Somma} = 15\,000 \text{ €} \quad III^a \text{ Somma} = 5000 \text{ €}$$

6. Un rappresentante di commercio può scegliere tra due tipi di contratto:

a. Contratto A: stipendio mensile fisso di 700 € più una percentuale del 6% sulle vendite effettuate in un mese;

b. Contratto B: stipendio mensile fisso di 600 € più una percentuale del 8% sulle vendite effettuate in un mese.

Sotto quali condizioni il contratto A è migliore del contratto B?

Soluzione

Poniamo il Numero delle vendite = x Stipendio mensile totale = y con $x, y \in N$

Contratto A: $y = 6\% x + 700$

Contratto B: $y = 8\% x + 600$

$$\frac{6}{100} x + 700 > \frac{8}{100} x + 600; \quad 6x + 70000 > 8x + 60000; \quad -2x > 10000; \quad x < 5000.$$

Il contratto A è migliore del contratto B quando il rappresentante di commercio vende merce per una cifra minore di 5000 €.