1. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza,			
a. semplifica i seguenti radicali:	$\sqrt{25x^6y^4}$	$\sqrt{9x^4+12x^2+4}$	$\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1}$
b. trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:	$\sqrt{3x^2}$	$\sqrt{x^3-2x^2}$	$\sqrt{a^5-6a^4+9a^3}$

2. Verifica che:

$$\sqrt{50}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{75}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad = \quad 2\sqrt{2}$$

$$\frac{10-\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-2\right)^4}-\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^5}{\left(1-\sqrt{5}\right)^2\cdot\left(6+2\sqrt{5}\right)} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

3. Semplifica l'espressione $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{4x^2}} \ : \ \sqrt[3]{2x^2\cdot\sqrt{2x}}\ ,\ con\ \ x>0$ con uno dei due seguenti metodi:
   a. con i radicali;
   b. con l'uso delle potenze a esponente razionale.

4. Risolvi la seguente disequazione: $\dfrac{5}{x^2-5}\geq\dfrac{2}{x-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{x+\sqrt{5}}$

5. In un trapezio rettangolo ABCD, la base maggiore AB è il doppio della base minore e l'angolo $\widehat{ABC}=45°$. Sapendo che la somma delle lunghezze delle diagonali è $6\ cm$, determina il perimetro del trapezio.

Soluzione

1. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza,

   a. semplifica i seguenti radicali: $\sqrt{25x^6y^4}$ $\quad \sqrt{9x^4+12x^2+4}$ $\quad \sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1}$

$$\sqrt{25x^6y^4} = 5|x|^3y^2$$
$$\sqrt{9x^4+12x^2+4} = \sqrt{(3x^2+2)^2} = 3x^2+2$$
$$\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1} = \sqrt[6]{(x-1)^3} = \sqrt[2]{x-1} \qquad se\ x \geq 1$$

1. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza,

   b. trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili: $\sqrt{3x^2}$ $\quad \sqrt{x^3-2x^2}$ $\quad \sqrt{a^5-6a^4+9a^3}$

$$\sqrt{3x^2} = |x| \cdot \sqrt{3}$$
$$\sqrt{x^3-2x^2} = \sqrt{x^2(x-2)} = \begin{cases} x\sqrt{x-2} & se\ \ x \geq 2 \\ 0 & se\ \ x = 0 \end{cases}$$
$$\sqrt{a^5-6a^4+9a^3} = \sqrt{a^3(a^2-6a+9)} = \sqrt{a^3(a-3)^2} = a \cdot |a-3|\sqrt{a} \qquad C.E.:\ \ a \geq 0$$

2. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\sqrt{50}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{75}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}+\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-5\sqrt{3}+\frac{3\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})} =$$
$$= 5\sqrt{2}+\frac{6\cdot\sqrt{3}}{3}-5\sqrt{3}+\frac{3\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ .$$

$$\frac{10-\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}-\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^5}{(1-\sqrt{5})^2\cdot(6+2\sqrt{5})}$$

Occorre fare attenzione a: $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} = |\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3} \quad perchè \ \ \sqrt{3}-2<0$

$$\frac{10-\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}-\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^5}{(1-\sqrt{5})^2\cdot(6+2\sqrt{5})} = \frac{10-(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{(1+5-2\sqrt{5})\cdot(6+2\sqrt{5})} = \frac{10-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{(6-2\sqrt{5})\cdot(6+2\sqrt{5})} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\ .$$

3. Semplifica l'espressione $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{4x^2}}\ :\ \sqrt[3]{2x^2\cdot\sqrt{2x}}$, $con\ \ x>0$ in due modi:
   a. con i radicali;
   b. con l'uso delle potenze a esponente razionale.

<u>Soluzione con l'uso dei radicali</u>

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{4x^2}}\ :\ \sqrt[3]{2x^2\cdot\sqrt{2x}} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^3\cdot4x^2}}\ :\ \sqrt[3]{\sqrt{4x^4\cdot2x}} =$$
$$= \sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{4x^5}\ :\ \sqrt[6]{8x^5} = \sqrt[6]{\frac{x^3\cdot4x^5}{8x^5}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{2}}\ .$$

<u>Soluzione con l'uso delle potenze a esponente razionale</u>

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{4x^2}}\ :\ \sqrt[3]{2x^2\cdot\sqrt{2x}} = x^{\frac{1}{2}}\cdot\left[x\cdot2^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\right]^{1/2}\ :\ \left[2x^2\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right]^{1/3} =$$
$$= x^{\frac{1}{2}}\cdot\left[2^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}\right]^{1/2}\ :\ \left[2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}\right]^{1/3} = x^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{6}}\ :\ 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}} = 2^{-\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{2}}\ .$$

4. Risolvi la seguente disequazione:

$$\frac{5}{x^2-5} \geq \frac{2}{x-\sqrt{5}} - \frac{2}{x+\sqrt{5}}$$

Soluzione

$$\frac{5}{x^2-5} \geq \frac{2}{x-\sqrt{5}} - \frac{2}{x+\sqrt{5}} \; ; \qquad \frac{5}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} - \frac{2}{x-\sqrt{5}} + \frac{2}{x+\sqrt{5}} \geq 0 \; ;$$

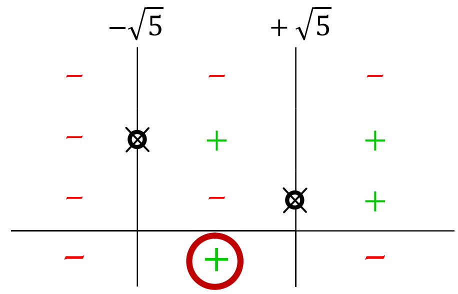
$$\frac{5-2\cdot(x+\sqrt{5})+2\cdot(x-\sqrt{5})}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} \geq 0 \; ; \qquad \frac{5-2x-2\sqrt{5}+2x-2\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} \geq 0 \; ;$$

$$\frac{5-4\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} \geq 0 \; ;$$

$5-4\sqrt{5} \geq 0 \qquad \nexists\, x \in R$

$x+\sqrt{5} > 0 \qquad x > -\sqrt{5}$

$x-\sqrt{5} > 0 \qquad x > +\sqrt{5}$



La soluzione è $\quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

6. In un trapezio rettangolo ABCD, la base maggiore AB è il doppio della base minore CD e l'angolo $\widehat{ABC} = 45°$. Sapendo che la somma delle lunghezze delle diagonali è $6\ cm$, determina il perimetro del trapezio.

Soluzione

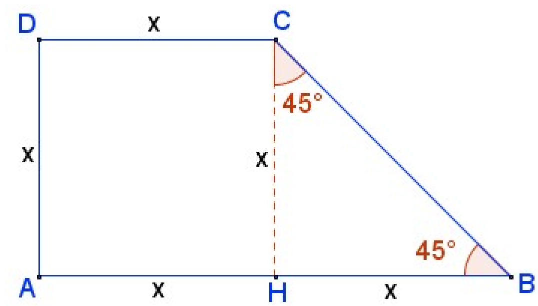
Poniamo $\overline{CD} = x$, *con* $x \in R^+$.

Si ottiene: $\overline{AB} = 2x$ *e* $\overline{AH} = x$.

Si ricava: $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 2x - x = x$.

Dal triangolo rettangolo isoscele BCH si ottiene:

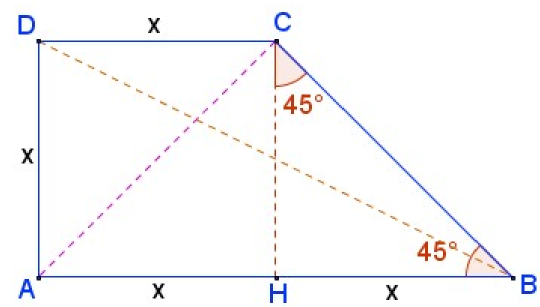
$\overline{CH} = x$ *e quindi* $\overline{AD} = x$



$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2} = \sqrt{(2x)^2+x^2} = \sqrt{4x^2+x^2} = \sqrt{5x^2} = \sqrt{5}\,x$.

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2+\overline{CH}^2} = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x$.

$\overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{2}\,x$.



$\overline{AC}+\overline{BD} = 6 \; ; \qquad \sqrt{2}\,x+\sqrt{5}\,x = 6 \; ; \qquad (\sqrt{2}+\sqrt{5})\,x = 6 \; ;$

$$x = \frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = 2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \,.$$

Il perimetro è :

$$p = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD} = 2x+\sqrt{2}\,x+x+x = 4x+\sqrt{2}\,x = (4+\sqrt{2})\,x =$$

$$= 2\cdot(4+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \,.$$