Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2018-2019

Classe *2A Liceo Scientifico* *19 dicembre 2018*

Prova di Matematica : Piano Cartesiano e retta

1. Tre diverse compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:
    a. la compagnia A applica un costo fisso di 3 centesimi di scatto alla risposta più 0,5 centesimi per ogni minuto di conversazione;
    b. la compagnia B applica la tariffa di 2 centesimi per ogni minuto di conversazione, senza costi fissi.
    c. la compagnia C applica un costo fisso di 7 centesimi di scatto alla risposta e minuti illimitati.

Stabilisci, in dipendenza della durata di una telefonata, quale scelta è la più conveniente.

2. Dato il fascio di rette di equazione $kx + (k+1)y + 2 - k = 0$, determina:
    a. il tipo (fascio proprio / fascio improprio);
    b. il centro del fascio;
    c. la retta a del fascio parallela alla retta $4y - 3 = 0$;
    d. la retta b del fascio passante per il punto $P(4; -1)$;
    e. la retta c del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani;
    f. la retta d del fascio perpendicolare alla bisettrice del II e IV quadrante*;*

3. Dato il triangolo di vertici: $\mathrm{A}\left(-1;-1\right)$, $\mathrm{B}\,(4;\,-2)$, $\mathrm{C}\,(1;\,2)$, determina:
    a. il perimetro del triangolo ABC;
    b. l'area del triangolo ABC;
    c. il quarto vertice D del parallelogramma ABCD;
    d. le coordinate del baricentro del triangolo.

Soluzione

1. Tre diverse compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:
   a. la compagnia A applica un costo fisso di 3 centesimi di scatto alla risposta più 0,5 centesimi per ogni minuto di conversazione;
   b. la compagnia B applica la tariffa di 2 centesimi per ogni minuto di conversazione, senza costi fissi.
   c. la compagnia C applica un costo fisso di 7 centesimi di scatto alla risposta e minuti illimitati.

Stabilisci, in dipendenza della durata di una telefonata, quale scelta è la più conveniente.

Soluzione

Ponendo il numero dei minuti di conversazione = x *e il costo della telefonata* = y , *con* $x \in N \quad \wedge \quad y \in Q^+$, *si ottengono le equazioni delle tre tariffe:*

A: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 3}$ $\qquad$ B: $\boldsymbol{y = 2x + 0}$ $\qquad$ C. $\boldsymbol{y = 7}$

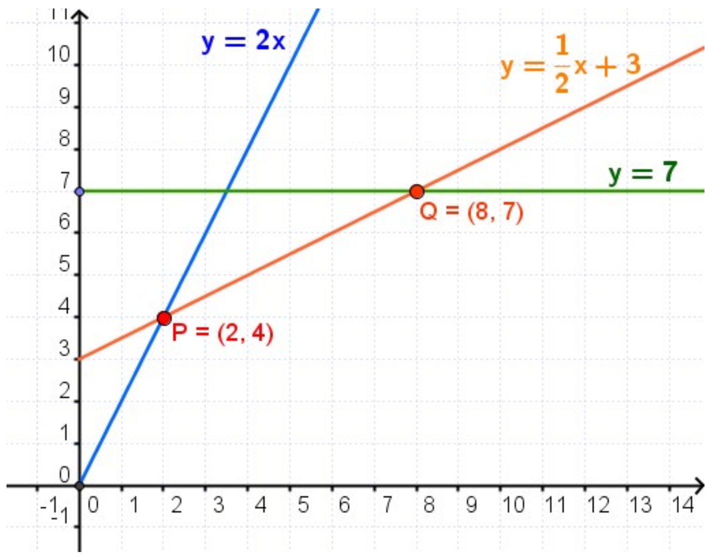
Determiniamo i punti di intersezione fra le tre funzioni lineari:

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = \frac{1}{2}x + 3 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x = x + 6 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 6 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P\,(2\,;4)$$

$$\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 = 7 \\ \text{———} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 6 = 14 \\ \text{———} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q\,(8\,;7)$$

$$\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}\begin{cases} y = 2x \\ y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 7 \\ \text{———} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R\left(\frac{7}{2}\,;7\right)$$

Tracciamo poi i grafici delle tre funzioni lineari:



Dall'analisi dei grafici si ottiene:

Per $0 \le x < 2$ *è più conveniente la compagnia B;*

Per $2 < x < 8$ *è più conveniente la compagnia A*

Per $x > 8$ *è più conveniente la compagnia C*

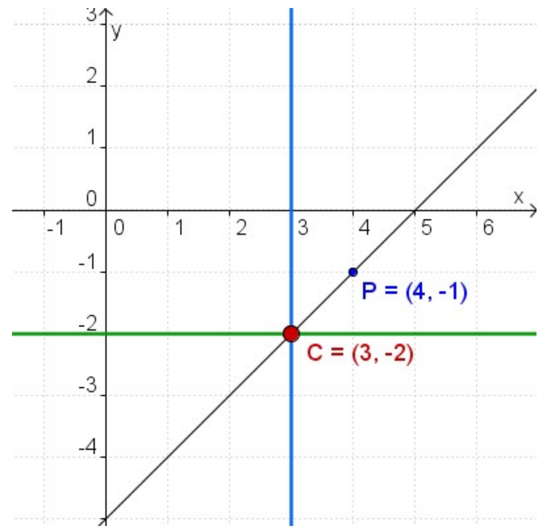
Per $x = 2$ *per due minuti di conversazione è indifferente scegliere la compagnia A o la compagnia B.*

Per $x = 8$ *per 8 giorni di noleggio è indifferente scegliere la compagnia A o la compagnia C.*

2. Dato il fascio di rette di equazione $kx + (k+1)y + 2 - k = 0$, determina:

a. il tipo (fascio proprio / fascio improprio);
b. il centro del fascio;
c. la retta a del fascio parallela alla retta $4y - 3 = 0$;
d. la retta b del fascio passante per il punto $P(4; -1)$;
e. la retta c del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani;
f. la retta d del fascio perpendicolare alla bisettrice del II e IV quadrante;

Soluzione



a. *Si tratta di un fascio proprio di rette perché il coefficiente angolare dipende dal parametro k:*

$$m_f = -\frac{a}{b} = -\frac{k}{k+1}$$

b. *Per* $k = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x + (0+1)y + 2 - 0 = 0 \; ; \quad y = -2$
Per $k = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot x + (-1+1)y + 2 - (-1) = 0 \; ; \quad x = 3$
Il centro del fascio ha coordinate: $C = (3\,;\,-2)$.

c. *la retta* $4y - 3 = 0$ *è una retta parallela all'asse x;*
la retta richiesta a *del fascio è quindi parallela all'asse x , la sua equazione è* $y = -2$.

d. *Imponendo il passaggio per il punto* $P(4; -1)$ *si ha:*

$$k \cdot 4 + (k+1) \cdot (-1) + 2 - k = 0 \qquad 4k - k - 1 + 2 - k = 0 \; ; \qquad 2k = -1 \; ; \quad k = -\frac{1}{2} \; .$$

La retta richiesta b *ha equazione:*

$$-\tfrac{1}{2}x + \left(-\tfrac{1}{2} + 1\right)y + 2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \; ; \qquad -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{2} = 0 = 0 \; ; \qquad x - y - 5 = 0 \; .$$

e. *La retta c del fascio passante per l'origine si ottiene per* $2 - k = 0$; $\quad k = 2$.
La sua equazione è: $2x + (2+1)y + 2 - 2 = 0$; $\qquad 2x + 3y = 0$.

f. *Il coefficiente angolare della bisettrice del II e IV quadrante (* $y = -x$ *) è* $m_b = -1$
Essendo la retta d perpendicolare alla bisettrice del II e IV quadrante si ha: $m_d = +1$
Imponendo la condizione: $m_f = m_d$ *si ottiene:*

$$-\frac{k}{k+1} = 1 \; ; \qquad -k = k + 1 \; ; \qquad 2k = -1 \; ; \qquad k = -\frac{1}{2} \; .$$

La retta richiesta c *ha equazione :*

$$-\tfrac{1}{2}x + \left(-\tfrac{1}{2} + 1\right)y + 2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \; ; \qquad -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{2} = 0 \; ; \qquad x - y - 5 = 0 \; .$$

3. Dato il triangolo di vertici: $A\left(-1;-1\right)$, $B\ (4;\ -2)$, $C\ (1;\ 2)$, determina:

a. il perimetro del triangolo ABC;
b. l'area del triangolo ABC;
c. le coordinate del baricentro del triangolo;
d. le coordinate del IV vertice D del parallelogramma ABCD.

Soluzione a

Calcoliamo la misura del lato AB :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1-4)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}\ .$$

Calcoliamo la misura del lato BC :

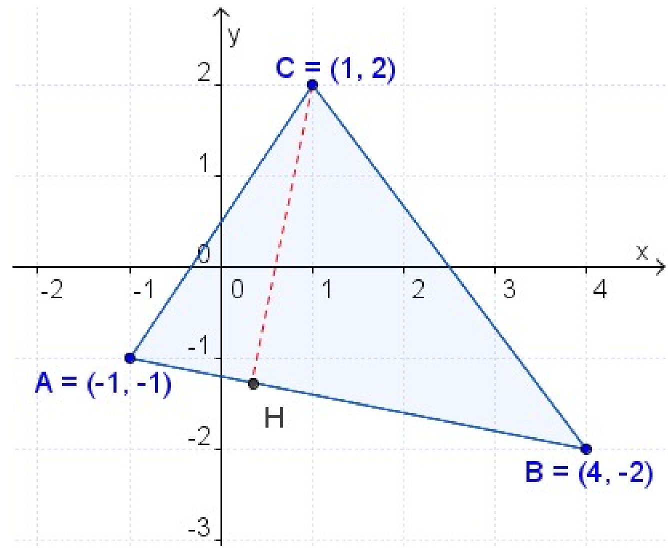
$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} =$$

$$= \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\ .$$

Calcoliamo la misura del lato AC :

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\ .$$



La misura del perimetro è:

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \sqrt{26} + 5 + \sqrt{13}\ .$$

Soluzione b

Determiniamo l'equazione della retta passante per A e B :

$$\frac{y+1}{-2+1} = \frac{x+1}{4+1}\ ; \qquad \frac{y+1}{-1} = \frac{x+1}{5}\ ; \qquad 5\cdot(y+1) = -1\cdot(x+1)\ ;$$

$$5y + 5 = -x - 1\ ; \qquad 5y = -x - 6\ ; \qquad y = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}\ .$$

Calcoliamo la misura dell'altezza CH :

$$\overline{CH} = \frac{|mx_C + q - y_C|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{6}{5} - 2\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{\left|-\frac{17}{5}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{25}}} = \frac{\left|-\frac{17}{5}\right|}{\sqrt{\frac{26}{25}}} = \frac{17}{5}\cdot\sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{17}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{17}{\sqrt{26}}\ .$$

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{17}{\sqrt{26}} = \frac{17}{2}\ .$$

Soluzione c

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AB :

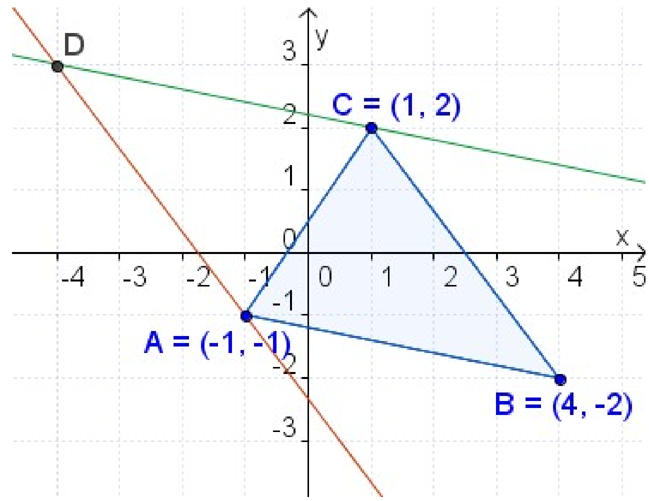
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-(-2)}{-1-4} = -\frac{1}{5} \; .$$

Determiniamo l'equazione della retta passante per il punto C e parallela alla retta AB:

$$y - y_C = m_{CD} \cdot (x - x_C) \; ;$$

$$y - 2 = -\frac{1}{5} \cdot (x-1) \; ; \qquad y - 2 = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \; ;$$

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} + 2 \; ; \qquad y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5} .$$



Determiniamo il coefficiente angolare della retta BC :

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-2-2}{4-1} = -\frac{4}{3} \; .$$

Determiniamo l'equazione della retta passante per il punto A e parallela alla retta BC:

$$y - y_A = m_{AD} \cdot (x - x_A) \; ;$$

$$y - (-1) = -\frac{4}{3} \cdot \big(x - (-1)\big) \; ; \qquad y + 1 = -\frac{4}{3} \cdot (x+1) \; ; \qquad y + 1 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} ; \qquad y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3} .$$

Determiniamo le coordinate del quarto vertice D del parallelogramma:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5} \\ y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3} = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5} \\ — \end{cases} \qquad \begin{cases} -20x - 35 = -3x + 33 \\ — \end{cases} \qquad \begin{cases} -17x = 68 \\ — \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ — \end{cases}$$

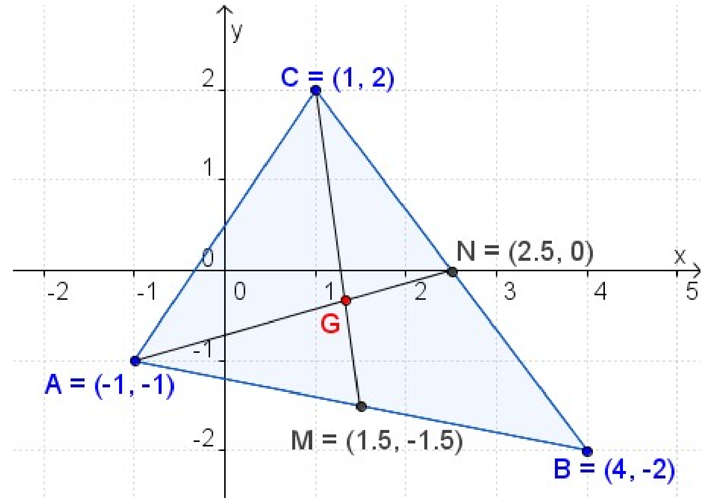
$$\begin{cases} — \\ y = -\frac{4}{3}(-4) - \frac{7}{3} = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} = \frac{16-7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = +3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad D(-4\,;3) \; .$$

Verifica

$$x_A + x_C = x_B + x_D \qquad -1 + 1 = +4 + x_D \qquad x_D = -4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \qquad -1 + 2 = -2 + y_D \qquad y_D = +3$$

Soluzione d



Determiniamo le coordinate del punto medio del lato AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+4}{2} = +\frac{3}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+(-2)}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Determiniamo l'equazione della mediana CM:

$$\frac{y - y_M}{y_C - y_M} = \frac{x - x_M}{x_C - x_M}\ ; \qquad \frac{y + \frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{x - \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}}\ ;$$

$$\frac{y + \frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{x - \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\ ; \qquad -\frac{1}{2}\cdot\left(y + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)\ ; \qquad -\frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = \frac{7}{2}x - \frac{21}{4}\ ; \qquad -2y - 3 = 14x - 21\ ;$$

$$-2y = 14x - 18\ ; \qquad y = -7x + 9\ ;$$

Determiniamo le coordinate del punto medio del lato BC:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+1}{2} = +\frac{5}{2}$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$$

Determiniamo l'equazione della mediana AN:

$$\frac{y - y_N}{y_A - y_N} = \frac{x - x_N}{x_A - x_N}\ ; \qquad \frac{y - 0}{-1 - 0} = \frac{x - \frac{5}{2}}{-1 - \frac{5}{2}}\ ;$$

$$\frac{y}{-1} = \frac{x - \frac{5}{2}}{-\frac{7}{2}}\ ; \qquad -\frac{7}{2}y = -x + \frac{5}{2}\ ; \qquad -7y = -2x + 5\ ; \qquad y = \frac{2}{7}x - \frac{5}{7}\ ;$$

Determiniamo le coordinate del baricentro del triangolo:

$$\begin{cases} y = -7x + 9 \\ y = \frac{2}{7}x - \frac{5}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{7}x - \frac{5}{7} = -7x + 9 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5 = -49x + 63 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 51x = 68 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ y = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{3} - \frac{5}{7} = \frac{8}{21} - \frac{5}{7} = \frac{8-15}{21} = -\frac{7}{21} = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad G\left(\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\right).$$

Verifica

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1+4+1}{3} = +\frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1-2+2}{3} = -\frac{1}{3}$$