5Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2018-2019

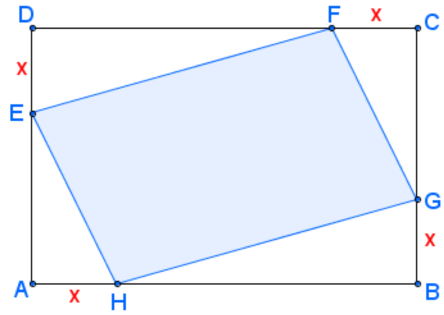
Classe *2A Liceo Scientifico* — *8 marzo 2019*

Prova di Matematica : Equazioni di II grado e parabola

1. Risolvi le seguenti equazioni:

   $(x+2)(x-2)+(x-1)^2 = x-3$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{x^2-1} = -\dfrac{1}{x^2+3x-4}$

2. Data l'equazione $(k-1)x^2+(2k-1)x+k+1=0$, con $k \neq 1$. Determina per quali valori di k :
   a. ammette soluzioni reali;
   b. una delle soluzioni è zero;
   c. ammette soluzioni reali e opposte
   d. ammette soluzioni reali e reciproche;
   e. ammette soluzioni reali la cui somma è uguale al loro prodotto.



3. I lati di un rettangolo ABCD sono lunghi $12\ cm$ e $8\ cm$. Facendo riferimento alla figura a lato, determina qual è il minimo valore dell'area del parallelogramma EFGH.

4. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale nell'incognita x :

   $$\frac{1}{a^2x-x-a^2+1}+\frac{1}{ax-x}=\frac{a+3}{2a^2-2}$$

5. Traccia il grafico della parabola avente equazione $y=2x^2+4x-6$ e determina l'area del triangolo formato dai suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$x^2 - 4 + x^2 + 1 - 2x = x - 3\,;\qquad 2x^2 - 3x = 0\,;\qquad x \cdot (2x-3) = 0\,;\quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{array}$

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{x^2+3x-4} \qquad C.E.:\ x \neq \pm 1 \quad \wedge \quad x \neq -4$$

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{(x+4)(x-1)}\,; \qquad m.c.m. = 2(x+1)(x-1)(x+4)$$

$(x+1)(x+4) + 2(x+4) = -2(x+1)\,;\qquad x^2 + 5x + 4 + 2x + 8 = -2x - 2\,;$

$x^2 + 9x + 14 = 0\,;\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25\,.$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-9-5}{2} = -7 \quad Accettabile \\ x_2 = \dfrac{-9+5}{2} = -2 \quad Accettabile \end{array}$$

2. Data l'equazione $(k-1)x^2 + (2k-1)x + k + 1 = 0$, con $k \neq 1$. Determina per quali valori di k :
   a. ammette soluzioni reali;
   b. una delle soluzioni è zero;
   c. ammette soluzioni reali e opposte
   d. ammette soluzioni reali e reciproche;
   e. ammette soluzioni reali la cui somma è uguale al loro prodotto.

<u>Soluzione a</u>

$\Delta \geq 0:\quad (2k-1)^2 - 4(k-1)(k+1) \geq 0\,;\qquad 4k^2 + 1 - 4k - 4(k^2-1) \geq 0\,;\qquad 4k^2 + 1 - 4k - 4k^2 + 4 \geq 0\,;$

$1 - 4k + 4 \geq 0\,;\quad -4k \geq -5\,;\quad 4k \leq 5\,;\quad k \leq \frac{5}{4}\,.$

<u>Soluzione b</u>

$(k-1) \cdot 0^2 + (2k-1) \cdot 0 + k + 1 = 0\,;\qquad k + 1 = 0\,;\qquad k = -1 \quad Accettabile\,.$

<u>Soluzione c</u>

$B = 0:\qquad 2k - 1 = 0\,;\qquad k = \frac{1}{2} \quad Accettabile\,.$

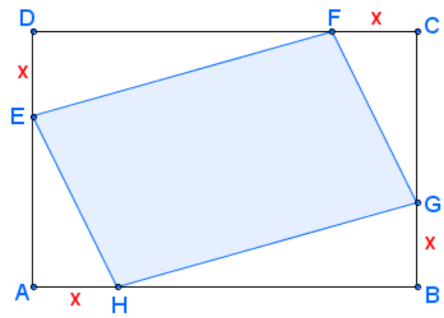
<u>Soluzione d</u>

$x_1 = \frac{1}{x_2}\,;\qquad x_1 \cdot x_2 = 1;\qquad \frac{C}{A} = 1\,;\qquad C = A:\qquad k + 1 = k - 1;\qquad 1 = -1 \qquad \nexists\, k \in R\,.$

<u>Soluzione e</u>

$-\frac{B}{A} = \frac{C}{A}\,;\qquad -B = C:\qquad -(2k-1) = k + 1\,;\qquad -2k + 1 = k + 1\,;\qquad -3k = 0\,;\qquad k = 0 \quad Accettabile\,.$

3. I lati di un rettangolo ABCD sono lunghi $12\ cm$ e $8\ cm$. Facendo riferimento alla figura, determina qual è il minimo valore dell'area del parallelogramma EFGH.



Soluzione

Essendo $\overline{DE} = x$ *deve risultare* $0 \le x \le 8$

$$S_{EFGH} = S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BGH} - S_{CFG} - S_{DEF}$$

$$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = (12 \cdot 8)\ cm^2 = 96\ cm^2 .$$

$$S_{AEH} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{AE}}{2} = \frac{x \cdot (8 - x)}{2}\ cm^2 = \frac{8x - x^2}{2}\ cm^2 \qquad S_{CFG} = S_{AEH} .$$

$$S_{BGH} = \frac{\overline{HB} \cdot \overline{BG}}{2} = \frac{(12 - x) \cdot x}{2}\ cm^2 = \frac{12x - x^2}{2}\ cm^2 \qquad S_{BGH} = S_{DEF} .$$

$$S_{EFGH} = 96 - 2 \cdot \frac{8x - x^2}{2} - 2 \cdot \frac{12x - x^2}{2} ;$$

$$S_{EFGH} = 96 - (8x - x^2) - (12x - x^2) ;$$

$$S_{EFGH} = 2x^2 - 20x + 96 ;$$

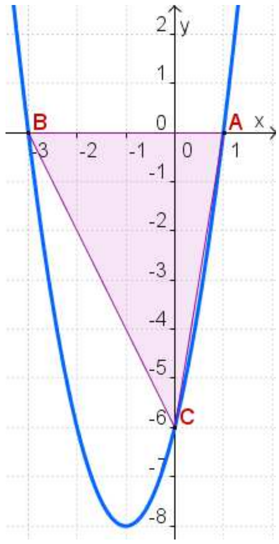
Avendo ottenuto una funzione di II grado, il suo grafico è una parabola con la concavità rivolta verso le ordinate positive.

Tale parabola assume il valore minimo nell'ascissa del vertice: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2 \cdot 2} = 5$.

Per tale valore di $x_V = 5 \quad \Rightarrow \quad S_{EFGH} = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 96 = 50 - 100 + 96 = 46$

Pertanto il minimo valore dell'area del parallelogramma EFGH è: $S_{MIN} = 46\ cm^2$.

5. Traccia il grafico della parabola avente equazione $y = 2x^2 + 4x - 6$ e determina l'area del triangolo formato dai suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani.



Soluzione

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad V(-1\ ;\ -8)$$
$$y_V = 2(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = -8$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 4x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A(-3\,;0) \\ A(+1\,;0) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 6 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -6 \\ x = 0 \end{cases} \qquad C(0, -6)$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{2} = \frac{|x_A - x_B| \cdot |y_O - y_C|}{2} = \frac{|1 + 3| \cdot |0 + 6|}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 .$$

4. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale nell'incognita x :

$$\frac{1}{a^2x-x-a^2+1}+\frac{1}{ax-x}=\frac{a+3}{2a^2-2}\,; \qquad C.E.(p):\ a\neq\pm1 \qquad C.A.(i):\ x\neq0 \quad \wedge \quad x\neq1$$

$$\frac{1}{(a^2-1)(x-1)}+\frac{1}{x(a-1)}=\frac{a+3}{2(a^2-1)} \qquad m.c.m.=\ 2x(a+1)(a-1)(x-1)$$

$$2x+2(a+1)(x-1)=x(x-1)(a+3)\,;$$

$$2x+2(ax-a+x-1)=x\,(ax+3x-a-3)\,;$$

$$2x+2ax-2a+2x-2-ax^2-3x^2+ax+3x=0\,;$$

$$-(a+3)x^2+(3a+7)x-2a-2=0\,;$$

$$(a+3)x^2-(3a+7)x+2a+2=0$$

Per $a=-3 \quad\Rightarrow\quad 2x-4=0\,; \qquad x=2\,.$

$$\Delta\ =\ (-3a-7)^2-4(a+3)(2a+2)\ =\ 9a^2+49-42a-4(2a^2+2a+6a+6)\ =$$

$$=\ 9a^2+49+42a-8a^2-8a-24a-24\ =\ a^2+10a+25\ =\ (a+5)^2\,.$$

$\Delta=0$: $\quad (a+5)^2=0\,; \quad a=-5 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\dfrac{-B}{2\cdot A}=\dfrac{3a+7}{2\cdot(a+3)}=\dfrac{3\cdot(-5)+7}{2\cdot(-5+3)}=\dfrac{-8}{-4}=2\,.$

$\Delta<0$: $\quad (a+5)^2<0\,; \quad \nexists\, a\in R\,.$

$\Delta>0$: $\quad (a+5)^2>0\,; \quad a\neq-5 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\dfrac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\dfrac{3a+7\mp\sqrt{(a+5)^2}}{2\cdot(a+3)}=$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{3a+7-(a+5)}{2\cdot(a+3)}=\dfrac{2a+2}{2\cdot(a+3)}=\dfrac{2\cdot(a+1)}{2\cdot(a+3)}=\dfrac{a+1}{a+3} \\[2ex] x_2=\dfrac{3a+7+(a+5)}{2\cdot(a+3)}=\dfrac{4a+12}{2\cdot(a+3)}=\dfrac{4\cdot(a+3)}{2\cdot(a+3)}\ =\ 2 \end{cases}$$

Accettabilità delle soluzioni:

La soluzione $x_2=2$ è accettabile .

La soluzione $\frac{a+1}{a+3}$ è accettabile se è diversa da 1 e da 0 . Effettuiamo la verifica:

$\dfrac{a+1}{a+3}\neq1; \qquad a+1\neq a+3\,; \qquad 1\neq3\,; \qquad \forall\, a\in R\,.$

$\dfrac{a+1}{a+3}\neq0; \qquad a+1\neq0\,; \qquad a\neq-1\,.$

Riepilogando:

Parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=\pm1$	*Perde significato*	-
$a=-3$	*Equazione di I° grado*	$x=2$
$a=-5$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_{1,2}=\ 2$
$a\neq\pm1 \ \wedge\ a\neq-3 \ \wedge\ a\neq-5$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1=\frac{a+1}{a+3} \ \wedge\ x_2=2$
$\nexists\, a\in R$	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	-