Prova di Matematica : Equazioni e disequazioni di grado superiore al primo

1. **Risolvi le seguenti equazioni:**

$2x^4 - 8 = 0$

$8x^6 - 22x^3 - 6 = 0$

$x^8 - 10x^4 + 9 = 0$

$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

2. **Risolvi le seguenti disequazioni:**

$3x^2 - 4x + 1 < 0$

$3x^4 + 6x^3 - 33x^2 - 36x > 0$

$$\frac{2x}{x^2 - 9} + \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9} \leq -\frac{1}{3 - x}$$

$$\begin{cases} (x-2)^5 > 0 \\ x^2 \geq 9 \\ 4 > \dfrac{4}{3 - x} \end{cases}$$

3. **Un aereo decolla da Catania e arriva a Milano; quindi riparte da Milano e ritorna a Catania percorrendo complessivamente $2400\ \mathrm{km}$. Nel tragitto Catania-Milano l'aereo ha un vento a favore di $100\ \mathrm{km/h}$, nel tragitto inverso l'aereo ha il medesimo vento contrario. Quale deve essere la velocità** *(media in assenza di vento)* **dell'aereo affinché il tempo di andata e ritorno non superi le 5 ore?**

Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$\mathbf{2x^4 - 8 = 0}$; $\quad x^4 = 4$; $\quad x_{1,2} = \mp\sqrt[4]{4} = \mp\sqrt{2}$.

$\mathbf{8x^6 - 22x^3 - 6 = 0}$; *Si pone* $x^3 = z$; *si ottiene:* $4z^2 - 11z - 3 = 0$;

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 169$; $\quad z_{1,2} = \dfrac{11 \mp 13}{2 \cdot 4} =$ $\quad z_1 = -\dfrac{1}{4} \quad x^3 = -\dfrac{1}{4}$; $\quad x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = -\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

$z_2 = +3 \quad x^3 = +3$; $\quad x_2 = \sqrt[3]{3}$

$\mathbf{x^8 - 10x^4 + 9 = 0}$; *Si pone* $x^4 = z$; *si ottiene:* $z^2 - 10z + 9 = 0$;

$\Delta = (-5)^2 - 1 \cdot 9 = 16 \quad z_{1,2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{16}}{1} =$ $\quad z_1 = 1 \quad x^4 = 1$; $\quad x_{1,2} = \mp\sqrt[4]{1} = \mp 1$

$z_2 = 9 \quad x^4 = 9$; $\quad x_{3,4} = \mp\sqrt[4]{9} = \mp\sqrt{3}$

$\mathbf{6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0}$

Non essendo $x = 0$ *soluzione dell'equazione dividiamo tutti i termini per* x^2

$6x^2 - 5x - 38 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} = 0$; $\qquad 6 \cdot \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 38 = 0$;

Si pone $x + \frac{1}{x} = z \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$6 \cdot (z^2 - 2) - 5z - 38 = 0$; $\quad 6z^2 - 5z - 50 = 0$; $\quad \Delta = 25 + 1200 = 1225 \quad z_{1,2} = \dfrac{5 \mp 35}{12} =$ $\quad z_1 = +\dfrac{10}{3} \quad z_2 = -\dfrac{5}{2}$

Sostituendo in $x + \frac{1}{x} = z$ *si ha:*

$x + \dfrac{1}{x} = +\dfrac{10}{3}$; $\quad 3x^2 - 10x + 3 = 0$; $\quad \Delta = 25 - 9 = 16$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{5 \mp 4}{3} =$ $\quad x_1 = \dfrac{1}{3} \quad x_2 = 3$

$x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2}$; $\quad 2x^2 + 5x + 2 = 0$; $\quad \Delta = 25 - 16 = 9$; $\quad x_{3,4} = \dfrac{-5 \mp 3}{4} =$ $\quad x_3 = -2 \quad x_4 = -\dfrac{1}{2}$

2. Risolvi le seguenti disequazioni:

$3x^2 - 4x + 1 < 0$;

$3x^2 - 4x + 1 = 0$; $\quad \Delta = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 1 \quad x_{1,2} = \dfrac{2 \mp 1}{3} =$ $\quad x_1 = \dfrac{1}{3} \quad x_2 = 1$

La soluzione è $\frac{1}{3} < x < 1$

$3x^4 + 6x^3 - 33x^2 - 36x > 0$; $3x \cdot (x^3 + 2x^2 - 11x - 12) > 0$;

Scomponendo con Ruffini si ha:

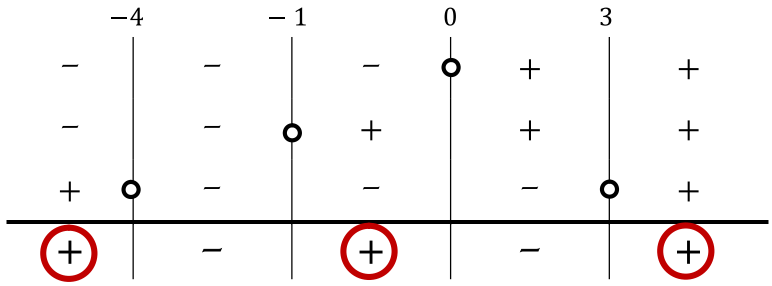
$3x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + x - 12) > 0$

	1	2	−11	−12
−1		−1	−1	+12
	1	+1	−12	0

$3x > 0$ $x > 0$

$x + 1 > 0$ $x > -1$

$x^2 + x - 12 > 0$ $x < -4 \quad \vee \quad x > 3$



$x < -4 \quad \vee \quad -1 < x < 0 \quad \vee \quad x > 3$.

$$\frac{2x}{x^2 - 9} + \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9} \le -\frac{1}{3 - x} \, ;$$

$$\frac{2x}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{x - 2}{(x + 3)^2} + \frac{1}{3 - x} \le 0 \, ; \qquad \frac{2x}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{x - 2}{(x + 3)^2} - \frac{1}{x - 3} \le 0 \, ;$$

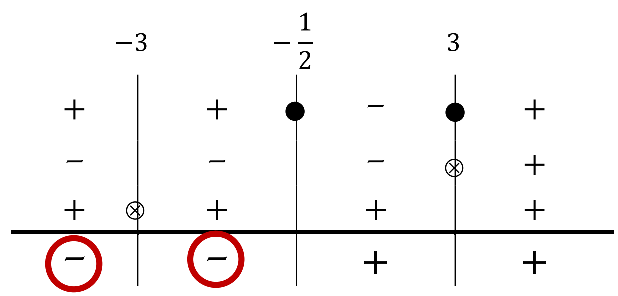
$$\frac{2x(x + 3) + (x - 2)(x - 3) - (x^2 + 6x + 9)}{(x - 3)(x + 3)^2} \le 0 \, ; \qquad \frac{2x^2 + 6x + x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 6x - 9}{(x - 3)(x + 3)^2} \le 0 \, ;$$

$$\frac{2x^2 - 5x - 3}{(x - 3)(x + 3)^2} \le 0 \, ;$$

$2x^2 - 5x - 3 \ge 0$ $x \le -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x \ge 3$

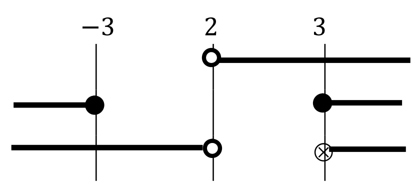
$x - 3 > 0$ $x > 3$

$(x + 3)^2 > 0$ $x \ne -3$



La soluzione è $x < -3 \quad \vee \quad -3 < x < \frac{1}{2}$

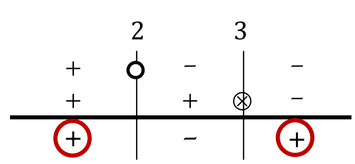
$$\begin{cases} (x - 2)^5 > 0 \\ x^2 \ge 9 \\ 4 > \dfrac{4}{3 - x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2 \\ x \le -3 \quad \vee \quad x \ge 3 \\ x < 2 \quad \vee \quad x > 3 \end{cases}$$



$x > 3$

$4 > \dfrac{4}{3 - x}$; $4 - \dfrac{4}{3 - x} > 0$; $\dfrac{4 \cdot (3 - x) - 4}{3 - x} > 0$; $\dfrac{12 - 4x - 4}{3 - x} > 0$;

$\dfrac{-4x + 8}{3 - x} > 0$ $-4x + 8 > 0$, $3 - x > 0$ $x < 2$, $x < 3$



3. Un aereo decolla da Catania e arriva a Milano; quindi riparte da Milano e ritorna a Catania percorrendo complessivamente $2400\ km$. Nel tragitto Catania-Milano l'aereo ha un vento a favore di $100\ km/h$, nel tragitto inverso l'aereo ha il medesimo vento contrario. Quale deve essere la velocità (in assenza di vento) dell'aereo affinché il tempo di andata e ritorno non superi le 5 ore?

Soluzione

Poniamo la velocità media dell'aereo in assenza di vento $= x$,

con $x > 100$, *altrimenti controvento l'aereo non si muove.*

Dalla relazione : $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ *si ricava :* $\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$

La relazione : $t_{C \to M} + t_{M \to C} \leq 5$ *diventa :*

$$\frac{s_{C\to M}}{v_{C\to M}} + \frac{s_{M\to C}}{v_{M\to C}} \leq 5\ ;$$

$$\frac{1200}{x+100} + \frac{1200}{x-100} \leq 5\ ;$$

$$\frac{240}{x+100} + \frac{240}{x-100} - 1 \leq 0\ ;$$

$$\frac{240 \cdot (x-100) + 240 \cdot (x+100) - (x^2 - 10000)}{x^2 - 10000} \leq 0\ ;$$

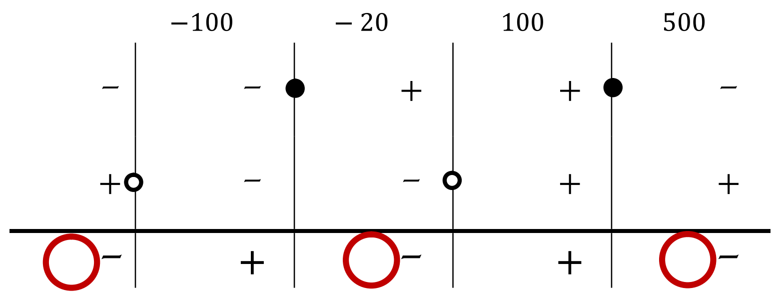
$$\frac{240x - 2400 + 240x + 2400 - x^2 + 10000}{x^2 - 10000} \leq 0\ ;$$

$$\frac{-x^2 + 480x + 10000}{x^2 - 10000} \leq 0\ ;$$

$-x^2 + 480x + 10000 \geq 0$; $\quad x^2 - 480x - 10000 \leq 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = (-240)^2 + 1 \cdot 10000 = 57600 + 10000 = 67600$.

$x_{1,2} = 240 \mp \sqrt{67600} = \begin{matrix} x_1 = 240 - 260 = -20 \\ x_2 = 240 + 260 = +500 \end{matrix}$ *Si ottiene :* $-20 \leq x \leq 500$.

$-x^2 - 480x + 10000 \geq 0$	$-20 \leq x \leq 500$
$x^2 - 10000 > 0$	$x < -100 \quad \vee \quad x > 100$



Si ottiene : $x < -100 \quad \vee \quad -20 \leq x < 100 \quad \vee \quad x \geq 500$.

Per la condizione iniziale $x > 100$, *si ottiene :* $x \geq 500$.

Pertanto l'aereo, in assenza di vento, deve avere una velocità superiore ai $500\ km/h$.