

1. Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

$$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$$

$$a^3 - a^2 - 20a$$

$$6a^2 + ab - 2b^2$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 + ax^2 + ax - 2a$$

$$4x^4y^4 - 12x^2y^2 + 9$$

$$12x^3 - 20x^2 - x + 6$$

2. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}{4a^2 - 8a + 4}$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 10x}$$

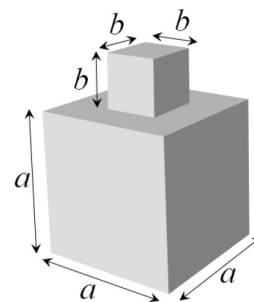
$$\frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-2a} + \frac{1}{a^2-3a+2}$$

$$\left[\frac{3+2x}{x^2+2x} \cdot \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2x^2-3x-9} \right) + \left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-3x} \right) \right] : \frac{2x+3}{x+3}$$

3. Dimostra che la differenza tra un numero di 3 cifre e quello che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre è divisibile per 99.

4. Il numero $2^{48} - 1$ possiede esattamente due divisori compresi fra 60 e 70. Quali sono:

5. Un solido S è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi come mostra la seguente figura
Determina la superficie totale del solido S?



Soluzione

2. Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

$$4x^4y^4 - 12x^2y^2 + 9 = (2x^2y^2 - 3)^2$$

$$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6 = (3a - 2b^2)^3$$

$$a^3 - a^2 - 20a = a \cdot (a^2 - a - 20) = a \cdot (a - 5)(a + 4)$$

$$6a^2 + ab - 2b^2 = 6a^2 + 4ab - 3ab - 2b^2 = 2a \cdot (3a + 2b) - b \cdot (3a + 2b) = (2a - b) \cdot (3a + 2b)$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 + ax^2 + ax - 2a =$$

$$= x^2(x + 2) - 1 \cdot (x + 2) + a(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x^2 - 1) + a(x + 2)(x - 1)$$

$$= (x + 2)(x + 1)(x - 1) + a(x + 2)(x - 1) = (x + 2)(x - 1)(x + 1 + a).$$

$$12x^3 - 20x^2 - x + 6 =$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$12x^3 - 20x^2 - x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right) (12x^2 - 26x + 12) =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (6x^2 - 13x + 6) = (2x + 1) \cdot (6x^2 - 13x + 6)$$

$-\frac{1}{2}$	12	-20	-1	+6
		-6	+13	-6
	12	-26	+12	0

$$= (2x + 1) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (6x - 9) =$$

$$= (2x + 1) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot 3 \cdot (2x - 3) = (2x + 1) \cdot (3x - 2) \cdot (2x - 3)$$

$\frac{2}{3}$	6	-13	+6
		+4	-6
	6	-9	0

2. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}{4a^2 - 8a + 4} = \quad \text{C.E.: } a \neq 1$$

$$\frac{(a - 1)^3}{4(a^2 - 2a + 1)} = \frac{(a - 1)^3}{4(a - 1)^2} = \frac{a - 1}{4}$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \quad \text{C.E.: } x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 2 \quad \wedge \quad x \neq -5$$

$$= \frac{x(x^2 - 4x + 4)}{x(x^2 + 3x - 10)} = \frac{x(x - 2)^2}{x(x + 5)(x - 2)} = \frac{x - 2}{x + 5}$$

$$\frac{1}{a - 1} - \frac{2}{a^2 - 2a} + \frac{1}{a^2 - 3a + 2} \quad \text{C.E.: } a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 1 \quad \wedge \quad a \neq 2$$

$$\frac{1}{a - 1} - \frac{2}{a(a - 2)} + \frac{1}{(a - 1)(a - 2)} = \frac{a(a - 2) - 2(a - 1) + a}{a(a - 1)(a - 2)} = \frac{a^2 - 2a - 2a + 2 + a}{a(a - 1)(a - 2)} =$$

$$= \frac{a^2 - 3a + 2}{a(a - 1)(a - 2)} = \frac{(a - 1)(a - 2)}{a(a - 1)(a - 2)} = \frac{1}{a}.$$

$$\left[\frac{3 + 2x}{x^2 + 2x} \cdot \left(\frac{1}{x - 3} + \frac{1}{2x^2 - 3x - 9} \right) + \left(\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 3x} \right) \right] : \frac{2x + 3}{x + 3} =$$

$$\text{C.E.: } x \neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq \pm 3.$$

$$= \left[\frac{3 + 2x}{x(x + 2)} \cdot \left(\frac{1}{x - 3} + \frac{1}{(x - 3)(2x + 3)} \right) + \left(\frac{1}{(x + 3)(x - 3)} - \frac{1}{x(x - 3)} \right) \right] : \frac{2x + 3}{x + 3} =$$

$$= \left[\frac{3 + 2x}{x(x + 2)} \cdot \left(\frac{2x + 3 + 1}{(x - 3)(2x + 3)} \right) + \left(\frac{x - (x + 3)}{x(x + 3)(x - 3)} \right) \right] : \frac{2x + 3}{x + 3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{3+2x}{x(x+2)} \cdot \frac{2x+4}{(x-3)(2x+3)} + \left(\frac{x-x-3}{x(x+3)(x-3)} \right) \right] : \frac{2x+3}{x+3} = \\
&= \left[\frac{3+2x}{x(x+2)} \cdot \frac{2(x+2)}{(x-3)(2x+3)} + \frac{-3}{x(x+3)(x-3)} \right] : \frac{2x+3}{x+3} = \\
&= \left[\frac{2}{x(x-3)} - \frac{3}{x(x+3)(x-3)} \right] : \frac{2x+3}{x+3} = \\
&= \left[\frac{2(x+3)-3}{x(x+3)(x-3)} \right] : \frac{2x+3}{x+3} = \\
&= \frac{2x+6-3}{x(x+3)(x-3)} : \frac{2x+3}{x+3} = \\
&= \frac{2x+3}{x(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x+3}{2x+3} = \\
&= \frac{1}{x(x-3)} .
\end{aligned}$$

3. Il numero $2^{48} - 1$ possiede esattamente due divisori compresi fra 60 e 70. Quali sono:

$$\begin{aligned}
2^{48} - 1 &= (2^{24} + 1)(2^{24} - 1) = (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^{12} - 1) = (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^6 + 1)(2^6 - 1) = \\
&= (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(65)(63) .
\end{aligned}$$

[Archimede 2000]

4. Dimostra che la differenza tra un numero di tre cifre e quello che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre è divisibile per 99 .

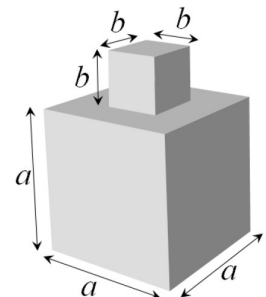
Soluzione

$$\begin{aligned}
(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) &= 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = \\
&= 99x - 99z = 99 \cdot (x - z) .
\end{aligned}$$

Tale espressione rappresenta un numero divisibile per 99.

5. Un solido S è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi come mostra la seguente figura
Determina la superficie totale del solido S ?

[Invalsi 2013]



Soluzione:

$$S_t = 6a^2 + 4b^2$$