

Prova di Matematica : **Equazioni e sistemi lineari**

1. Risolvi le seguenti equazioni :

$$\frac{4}{3x} + \frac{1}{3x+12} = \frac{x-1}{2x^2+8x}$$

$$\frac{1-2a}{x} + \frac{2a+2}{1-a} = \frac{2-a}{x}$$

2. Determina il grado dei seguenti sistemi

$\begin{cases} x - xy^3 = 5 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} (x-1)^3 + y^2 = 5 \\ (y-1) \cdot x^2 = 2 \end{cases}$
Sistema di ____ grado	Sistema di ____ grado

3. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema

$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2y - x = 9 \end{cases} \quad (x = 5 ; y = 1)$	$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3y - 4x = 4 \end{cases} \quad \left(x = \frac{1}{2} ; y = 2\right)$
SI NO	SI NO

4. Risolvi il seguente sistema di equazioni con un metodo a tua scelta :

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{y}{3} + \frac{x}{2} \\ \frac{5x + 3y - 18}{6} = \frac{2x - y}{4} + \frac{7}{12} \end{cases}$$

5. Risolvi il seguente problema

Un secchio pieno di acqua pesa complessivamente 9 kg; Riempito per metà di acqua pesa 5 kg. Quanto pesa il secchio vuoto ?

6. Risolvi il seguente problema

Una automobile Diesel paga una tassa annua di 450 €, mentre una automobile a Benzina paga una tassa annua di 150 €. Sapendo che l'automobile Diesel percorre in media 24 km con un litro di gasolio e che l'automobile Benzina percorre in media 20 km con un litro di benzina, e che il prezzo medio al litro del gasolio è di 1,2 € e quello della benzina è di 1,4 €, determina per quale numero di chilometri percorsi in un anno conviene l'automobile Diesel.

Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni :

$$\frac{4}{3x} + \frac{1}{3x+12} = \frac{x-1}{2x^2+8x}; \quad \frac{4}{3x} + \frac{1}{3 \cdot (x+4)} = \frac{x-1}{2x \cdot (x+4)};$$

$$C.E.: x \neq 0 \wedge x \neq -4.$$

$$m.c.m. = 6x \cdot (x+4)$$

$$6x \cdot (x+4) \cdot \frac{4}{3x} + 6x \cdot (x+4) \cdot \frac{1}{3 \cdot (x+4)} = 6x \cdot (x+4) \cdot \frac{x-1}{2x \cdot (x+4)};$$

$$2 \cdot (x+4) \cdot 4 + 2x = 3 \cdot (x-1);$$

$$8x + 32 + 2x = 3x - 3;$$

$$8x + 2x - 3x = -3 - 32;$$

$$7x = -35;$$

$$x = -\frac{35}{7} = -5 \quad \text{Tale soluzione è accettabile, perché è diversa da zero e da } -4.$$

$$\frac{1-2a}{x} + \frac{2a+2}{1-a} = \frac{2-a}{x}$$

Condizioni di esistenza: $a \neq 1$. Condizioni di accettabilità: $x \neq 0$.

Moltiplicando per il m.c.m. = $(1-a) \cdot x \neq 0$ si ottiene:

$$(1-a) \cdot (1-2a) + x \cdot (2a+2) = (1-a) \cdot (2-a);$$

$$1-2a-a+2a^2+2ax+2x=2-a-2a+a^2;$$

$$2ax+2x=2+a^2-2a^2-1;$$

$$(2a+2)x=1-a^2;$$

$$2(a+1)x=1-a^2;$$

$$\text{Se } a+1=0; \quad a=-1 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x=0 \quad \text{Equazione indeterminata.}$$

$$\text{Se } a+1 \neq 0; \quad a \neq -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-a^2}{2(a+1)} = \frac{(1-a) \cdot (1+a)}{2(a+1)} = \frac{1-a}{2}$$

Tale soluzione però, è accettabile se è diversa da zero.

$$\text{Cioè se } \frac{1-a}{2} \neq 0; \quad 1-a \neq 0; \quad a \neq 1.$$

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a = 1$	<i>Equazione che perde significato</i>	—
$a = -1$	<i>Equazione indeterminata</i>	$\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$
$a \neq -1 \wedge a \neq +1$	<i>Equazione determinata</i>	$x = \frac{1-a}{2}$

2. Determina il grado dei seguenti sistemi		3. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema	
$\begin{cases} x - xy^3 = 5 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} (x-1)^3 + y^2 = 5 \\ (y-1) \cdot x^2 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2y - x = 9 \end{cases} \quad (x=5; y=1)$	$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3y - 4x = 4 \end{cases} \quad \left(x = \frac{1}{2}; y = 2\right)$
Sistema di 4° grado	Sistema di 9° grado	NO	SI

4. Risolvi il seguente sistema di equazioni con un metodo a tua scelta :

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{y}{3} + \frac{x}{2} \\ 5x + 3y - 18 = \frac{2x - y}{4} + \frac{7}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 6 = 2y + 3x \\ 10x + 6y - 36 = 6x - 3y + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 9y = 43 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{3}{4}\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = -\frac{2}{9}\right) \quad S. Determinato$$

$$4 \cdot \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 9y = 43 \end{cases} \quad \begin{cases} 12x - 8y = 24 & - \\ 12x + 27y = 129 & = \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad -35y = -105; \quad y = 3$$

$$9 \cdot \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 9y = 43 \end{cases} \quad \begin{cases} 27x - 18y = 54 & + \\ 8x + 18y = 86 & = \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 35x = 140; \quad x = +4$$

La soluzione è $(x = 4; y = 3)$.

5. Risolvi il seguente problema

Un secchio pieno di acqua pesa complessivamente 9 kg; Riempito per metà di acqua pesa 5 kg. Quanto pesa il secchio vuoto ?

Soluzione

Poniamo il peso del secchio vuoto = x , e il peso della sabbia = y con $x, y \in R^+$.

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + \frac{y}{2} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \quad \left(\frac{a}{a'} = \frac{1}{2}\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = 1\right) \quad S. Determinato$$

$$2 \cdot \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 18 & - \\ 2x + y = 10 & = \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad y = 8;$$

$$\begin{cases} x + y = 9 & - \\ 2x + y = 10 & = \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad -x = -1; \quad x = 1$$

Il secchio vuoto pesa 1 kg.

6. Risolvi il seguente problema

Una automobile Diesel paga una tassa annua di 450 €, mentre una automobile a Benzina paga una tassa annua di 150 €. Sapendo che l'automobile Diesel percorre in media 24 km con un litro di gasolio e che l'automobile Benzina percorre in media 20 km con un litro di benzina, e che il prezzo medio al litro del gasolio è di 1,2 € e quello della benzina è di 1,4 €, determina per quale numero di chilometri percorsi in un anno conviene l'automobile Diesel.

Soluzione

Poniamo il numero dei km = x , e il Costo Annuo = y con $x, y \in R^+$.

Si ottengono le due funzioni costo:

Auto D $y = 450 + \frac{1,2}{24}x;$ $y = 450 + 0,05x$

Auto B $y = 150 + \frac{1,4}{20}x;$ $y = 150 + 0,07x$

L'auto diesel è più conveniente se:

$$450 + 0,05x < 150 + 0,07x; \quad 0,05x - 0,07x < 150 - 450; \quad -0,02x < -300;$$

$$0,02x > 300; \quad x > 300 : \frac{2}{100}; \quad x > 300 \cdot \frac{100}{2}; \quad x > 15000.$$

NOTA

$\frac{1,2}{24}$ rappresenta il costo al chilometro dell'automobile Diesel.