Alunno: ____ Classe: 2E L. Scientifico S.A. 28 marzo 2018

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$5x^2-4x+2=0$ $\quad$ $3x^2-\sqrt{3}\,x-2=0$ $\quad$ $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{3x^2+7x+2}+\frac{5}{6x+12}=0$

2. Determina per quali valori del parametro k l'equazione $kx^2-2(k+2)x+k+1=0$

a. ha radici reali;
b. ha radici reali e coincidenti;
c. ha radici reali e opposte;
d. ha radici reali tali che la somma dei loro quadrati è 4.

3. Risolvi e discuti la seguente equazione:

$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{a}=\frac{a+4}{2a}$;

4. In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno l'ampiezza di $60°$, la base minore misura a e l'area è $2\sqrt{3}\,a^2$. Determina la misura dell'altezza.

SOLUZIONE

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$5x^2-4x+2=0$; $\quad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\cdot c=(-2)^2-5\cdot 2=4-10=-6$;

$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{2\mp\sqrt{-6}}{5}=\quad x_1=\frac{2-\sqrt{6}\,i}{5}\quad x_2=\frac{2+\sqrt{6}\,i}{5}$

$3x^2-\sqrt{3}\,x-2=0$; $\quad \Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 3\cdot(-2)=3+24=27$;

$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{\sqrt{3}\mp\sqrt{27}}{2\cdot 3}=\quad x_1=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{6}=\frac{-2\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\quad x_2=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{6}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{3x^2+7x+2}+\frac{5}{6x+12}=0$; $\quad C.E.:\ x\neq-\frac{1}{3}\quad\wedge\quad x\neq\pm 2$

Fattorizziamo $3x^2+7x+2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)=(3x+1)(x+2)$

Calcoli: $3x^2+7x+2=0$; $\quad\Delta=49-24=25$; $\quad x_{1,2}=\frac{-7\mp\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\quad x_1=\frac{-7-5}{6}=-\frac{12}{6}=-2\quad x_2=\frac{-7+5}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(3x+1)(x+2)}+\frac{5}{6(x+2)}=0$; $\quad m.c.m.=6(3x+1)(x+2)(x-2)$

$6(3x+1)+6(x-2)+5(3x+1)(x-2)=0$;

$18x+6+6x-12+5(3x^2-6x+x-2)=0$;

$18x+6+6x-12+15x^2-30x+5x-10=0$;

$15x^2-x-16=0$;

$\Delta=1-4\cdot 15\cdot(-16)=961$; $\quad x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{961}}{2\cdot 15}=\quad x_1=\frac{1-31}{30}=-1$ *Accettabile* $\quad x_2=\frac{1+31}{30}=\frac{32}{30}=\frac{16}{15}$ *Accettabile*

3. Determina per quali valori del parametro k l'equazione $kx^2-2(k+2)x+k+1=0$

a. ha radici reali;
b. ha radici reali e coincidenti;
c. ha radici reali e opposte;
d. ha radici reali tali che $x_1^2+x_2^2=4$.

I coefficienti dell'equazione sono: $A=k$; $\quad B=-2(k+2)$; $\quad C=k+1$

a. *L'equazione ha soluzioni reali se* $\Delta\geq 0$: $\quad\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\cdot c\geq 0$;

$(-k-2)^2-k\cdot(k+1)\geq 0$; $\quad k^2+4+4k-k^2-k\geq 0$; $\quad 4+3k\geq 0$; $\quad k\geq-\frac{4}{3}$.

b. *L'equazione ha soluzioni reali e coincidenti se* $\Delta=0$: $\quad k=-\frac{4}{3}$.

c. *L'equazione ha soluzioni reali e opposte se* $b=0$: $\quad -2(k+2)=0$; $\quad k=-2$ Soluzione non accettabile

d. *L'equazione ha radici tali che la somma dei loro quadrati è 4* :

$x_1^2+x_2^2=4$; $\quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$; $\quad\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=4$; $\quad\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=4$;

$\frac{b^2-2ac}{a^2}=4$; $\quad\frac{(-2k-4)^2-2k(k+1)}{k^2}=4$; $\quad 4k^2+16+16k-2k^2-2k=4k^2$;

$-2k^2+14k+16=0$; $\quad k^2-7k-8=0$;

$\Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=49+32=81.\quad k_{1,2}=\frac{7\mp\sqrt{81}}{2\cdot 1}=\quad k_1=\frac{7-9}{2}=-1\quad k_2=\frac{7+9}{2}=+8$

2. Risolvi e discuti la seguente equazione:

$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{a}=\frac{a+4}{2a}$; $\qquad C.E.(P):\ a\neq 0 \qquad C.A.(x):\ x\neq -1$

$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{a}=\frac{a+4}{2a} \qquad m.c.m.=2a(x+1)$

$2a+4x(x+1)=(x+1)(a+4)$;

$2a+4x^2+4x=ax+4x+a+4$;

$4x^2-ax+a-4=0$; $\qquad A=4$; $\quad B=-a$; $\quad C=a-4$

L'equazione non è mai di I grado.

$\Delta = B^2-4\cdot A\cdot C = (-a)^2-4\cdot 4\cdot(a-4) = a^2-16a+64 = \boldsymbol{(a-8)^2}$

$\Delta<0$; $\quad (a-8)^2<0 \quad \nexists\, a\in R$.

$\Delta=0$; $\quad (a-8)^2=0$; $\quad a=8 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{a\mp\sqrt{0}}{2\cdot 4}=\frac{8}{8}=1$.

$\Delta>0$; $\quad (a-8)^2>0$; $\quad \forall\, a\neq 8 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{a\mp\sqrt{(a-8)^2}}{2\cdot 4}=\frac{a\mp(a-8)}{8}=$

$$= \begin{cases} x_1=\frac{a-(a-8)}{8}=\frac{a-a+8}{8}=\frac{8}{8}=\mathbf{1} \\ x_2=\frac{a+(a-8)}{8}=\frac{a+a-8}{8}=\frac{2a-8}{8}=\frac{2(a-4)}{8}=\boldsymbol{\frac{a-4}{4}} \end{cases}$$

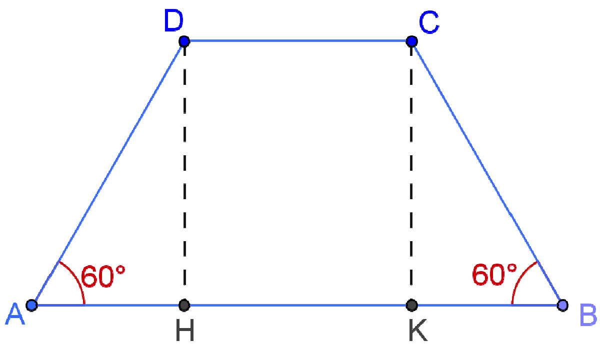
Tali soluzioni sono accettabili se verificano le condizioni di accettabilità $x\neq -1$

$x_1\neq -1$; $\quad 1\neq -1$; $\quad \forall a\in R$.

$x_2\neq -1$; $\quad \frac{a-4}{4}\neq -1$; $\quad a-4\neq -4 \quad a\neq 0$.

Parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a=0$	*Perde significato*	–
$\nexists\, a\in R$	*Equazione di I° grado*	–
$\nexists\, a\in R$	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	–
$a=8$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_{1,2}=1$
$a\neq 8 \wedge a\neq 0$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1=1 \wedge x_2=\frac{a-4}{4}$

4. In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno l'ampiezza di $60°$, la base minore misura a e l'area è $2\sqrt{3}\,a^2$. Determina la misura dell'altezza.



Soluzione

Poniamo la misura di $\overline{AH} = x$ *con* $x \in R^+$.
Si ottiene: $\overline{AB} = 2x + a$, $\overline{AD} = 2\overline{AH} = 2x$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PQH.
$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = \sqrt{3}\,x$.
Sfruttando la conoscenza dell'area del trapezio si ottiene:

$S_{ABCD} = 2\sqrt{3}\,a^2$; $\quad \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = 2\sqrt{3}\,a^2$; $\quad \dfrac{2x + a + a}{2} \cdot \sqrt{3}\,x = 2\sqrt{3}\,a^2$;

$\dfrac{2x + 2a}{2} \cdot \sqrt{3}\,x = 2\sqrt{3}\,a^2$; $\quad \dfrac{2(x + a)}{2} \cdot x = 2\,a^2$; $\quad (x + a) \cdot x = 2\,a^2$;

$x^2 + ax - 2\,a^2 = 0$; $\quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2) = a^2 + 8a^2 = 9a^2$;

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-a \mp \sqrt{9a^2}}{2 \cdot 1} = \qquad \begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{-a - 3a}{2} = \dfrac{-4a}{2} = -2a & \textit{Non accettabile} \\ x_2 = \dfrac{-a + 3a}{2} = \dfrac{2a}{2} = +a & \textit{Accettabile} \end{array}$$

Pertanto la misura dell'altezza è $\overline{DH} = \sqrt{3}\,a$.