1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$3x^2 - 2x + 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ $\qquad$ $\dfrac{1}{3x^2 + 7x + 2} = \dfrac{1}{4 - x^2} - \dfrac{5}{6x + 12}$

2. Determina per quali valori del parametro k l'equazione $(k-1)x^2 - 2kx + k + 3 = 0$, $\quad (k \neq 1)$

a. ha radici reali;
b. ha radici reali e coincidenti;
c. ha radici reali e reciproche;
d. ha radici reali e antireciproche;

3. Risolvi e discuti la seguente equazione:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{a+4}{2a} - \frac{2x}{a} \; ;$$

4. In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno l'ampiezza di $60°$, la base minore misura a e l'area è $2\sqrt{3}\,a^2$. Determina la misura dell'altezza.

SOLUZIONE

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$3x^2-2x+2=0$; $\qquad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\cdot c=(-1)^2-3\cdot 2=1-6=-5$;

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{1\mp\sqrt{-5}}{3}= \begin{cases} x_1=\frac{1-\sqrt{5}\,i}{3} \\ x_2=\frac{1+\sqrt{5}\,i}{3}\end{cases}$$

$x^2+3\sqrt{3}\,x+6=0$; $\qquad \Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=\left(3\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 1\cdot 6=27-24=3$;

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-3\sqrt{3}\mp\sqrt{3}}{2\cdot 1}= \begin{cases} x_1=\frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3} \\ x_2=\frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$\frac{1}{3x^2+7x+2}=\frac{1}{4-x^2}-\frac{5}{6x+12}$; $\qquad C.E.:\ x\neq-\frac{1}{3}\quad\wedge\quad x\neq\pm 2$

Fattorizziamo $\quad 3x^2+7x+2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)=(3x+1)(x+2)$

Calcoli: $3x^2+7x+2=0$; $\quad \Delta=49-24=25$; $\quad x_{1,2}=\frac{-7\mp\sqrt{25}}{2\cdot 3}= \begin{cases} x_1=\frac{-7-5}{6}=-\frac{12}{6}=-2 \\ x_2=\frac{-7+5}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}\end{cases}$

$\frac{1}{(3x+1)(x+2)}=\frac{1}{(2+x)(2-x)}-\frac{5}{6(x+2)}$; $\qquad m.c.m.=6(3x+1)(x+2)(2-x)$

$6(2-x)=6(3x+1)-5(3x+1)(2-x)$;

$12-6x=18x+6-5(6x-3x^2+2-x)$;

$12-6x=18x+6-30x+15x^2-10+5x$;

$12-6x-18x-6+30x-15x^2+10-5x=0$;

$-15x^2+x+16=0$;
$15x^2-x-16=0$;

$\Delta=1-4\cdot 15\cdot(-16)=961$; $\quad x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{961}}{2\cdot 15}= \begin{cases} x_1=\frac{1-31}{30}=-1 & \textit{Accettabile} \\ x_2=\frac{1+31}{30}=\frac{32}{30}=\frac{16}{15} & \textit{Accettabile}\end{cases}$

2. Determina per quali valori del parametro k l'equazione $(k-1)x^2-2kx+k+3=0$, $\quad k\neq 1$

a. ha radici reali;
b. ha radici reali e coincidenti;
c. ha radici reali e reciproche;
d. ha radici reali e antireciproche;

I coefficienti dell'equazione sono: $A=k-1$; $\quad B=-2k$; $\quad C=k+3$

a. *L'equazione ha soluzioni reali se* $\Delta\geq 0$:
$\frac{\Delta}{4}\geq 0$; $\quad (-k)^2-(k-1)\cdot(k+3)\geq 0$; $\quad k^2-k^2-3k+k+3\geq 0$; $\quad -2k\geq -3$; $\quad k\leq\frac{3}{2}$.

b. *L'equazione ha soluzioni reali e coincidenti se* $\Delta=0$: $\qquad k=\frac{3}{2}$.

c. *L'equazione ha soluzioni reali e reciproche se* $x_1=\frac{1}{x_2}$; $\quad x_1\cdot x_2=1$; $\quad \frac{c}{a}=1$; $\frac{k+3}{k-1}=1$;
$k+3=k-1$; $\quad 0k=-4 \quad \nexists k\in R$.

d. *L'equazione ha soluzioni reali e antireciproche se* $x_1=-\frac{1}{x_2}$; $\quad x_1\cdot x_2=-1$; $\quad \frac{c}{a}=-1$; $\frac{k+3}{k-1}=-1$;

e. $k+3=-k+1$; $\quad 2k=-2 \quad k=-1$.

3. Risolvi e discuti la seguente equazione:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{a+4}{2a} - \frac{2x}{a} \;; \qquad C.E.(P):\; a \neq 0 \qquad C.A.(x):\; x \neq -1$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{a+4}{2a} - \frac{2x}{a} \qquad m.c.m. = 2a(x+1)$$

$$2a = (x+1)(a+4) - 4x(x+1)\;;$$

$$2a = ax + 4x + a + 4 - 4x^2 - 4x\;;$$

$$4x^2 - ax + a - 4 = 0\;; \qquad A = 4\;; \quad B = -a\;; \quad C = a - 4$$

L'equazione non è mai di I grado.

$$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = (-a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a-4) = a^2 - 16a + 64 = (\boldsymbol{a-8})^2$$

$$\Delta < 0\;; \quad (a-8)^2 < 0 \quad \nexists\, a \in R\,.$$

$$\Delta = 0\;; \quad (a-8)^2 = 0\;; \quad a = 8 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A} = \frac{a \mp \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1\,.$$

$$\Delta > 0\;; \quad (a-8)^2 > 0\;; \quad \forall\, a \neq 8 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A} = \frac{a \mp \sqrt{(a-8)^2}}{2 \cdot 4} = \frac{a \mp (a-8)}{8} =$$

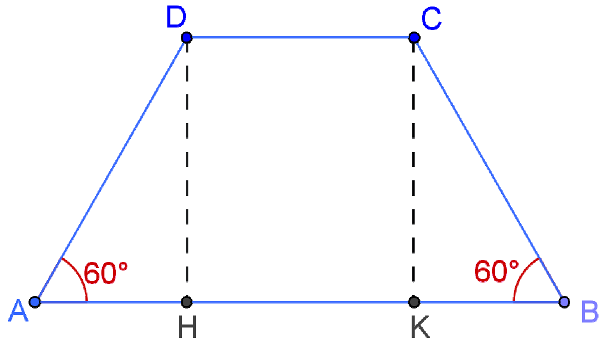
$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{a-(a-8)}{8} = \dfrac{a-a+8}{8} = \dfrac{8}{8} = \mathbf{1} \\[2ex] x_2 = \dfrac{a+(a-8)}{8} = \dfrac{a+a-8}{8} = \dfrac{2a-8}{8} = \dfrac{2(a-4)}{8} = \dfrac{\boldsymbol{a-4}}{\mathbf{4}} \end{cases}$$

Tali soluzioni sono accettabili se verificano le condizioni di accettabilità $x \neq -1$

$$x_1 \neq -1\;; \qquad 1 \neq -1\;; \qquad \forall a \in R\,.$$

$$x_2 \neq -1\;; \qquad \frac{a-4}{4} \neq -1\;; \qquad a - 4 \neq -4 \qquad a \neq 0\,.$$

Parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 0$	*Perde significato*	$-$
$\nexists\, a \in R$	*Equazione di I° grado*	$-$
$\nexists\, a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	$-$
$a = 8$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$x_{1,2} = 1$
$a \neq 8 \;\wedge\; a \neq 0$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1 = 1 \;\wedge\; x_2 = \frac{a-4}{4}$



4. **In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno l'ampiezza di** $60°$**, la base minore misura** a **e l'area è** $2\sqrt{3}\,a^2$ **. Determina la misura dell'altezza.**

Soluzione

Poniamo la misura di $\overline{AH} = x$ *con* $x \in R^+$.
Si ottiene: $\overline{AB} = 2x + a$, $\overline{AD} = 2\overline{AH} = 2x$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PQH.
$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = \sqrt{3}\,x$.
Sfruttando la conoscenza dell'area del trapezio si ottiene:

$S_{ABCD} = 2\sqrt{3}\,a^2$; $\quad \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = 2\sqrt{3}\,a^2$; $\quad \dfrac{2x + a + a}{2} \cdot \sqrt{3}\,x = 2\sqrt{3}\,a^2$;

$\dfrac{2x + 2a}{2} \cdot \sqrt{3}\,x = 2\sqrt{3}\,a^2$; $\quad \dfrac{2(x + a)}{2} \cdot x = 2\,a^2$; $\quad (x + a) \cdot x = 2\,a^2$;

$x^2 + ax - 2\,a^2 = 0$; $\quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2) = a^2 + 8a^2 = 9a^2$;

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-a \mp \sqrt{9a^2}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-a - 3a}{2} = \dfrac{-4a}{2} = -2a & \textit{Non accettabile} \\ x_2 = \dfrac{-a + 3a}{2} = \dfrac{2a}{2} = +\boldsymbol{a} & \textit{Accettabile} \end{cases}$$

Pertanto la misura dell'altezza è $\boldsymbol{\overline{DH}} = \sqrt{3}\,x = \boldsymbol{\sqrt{3}\,a}$.