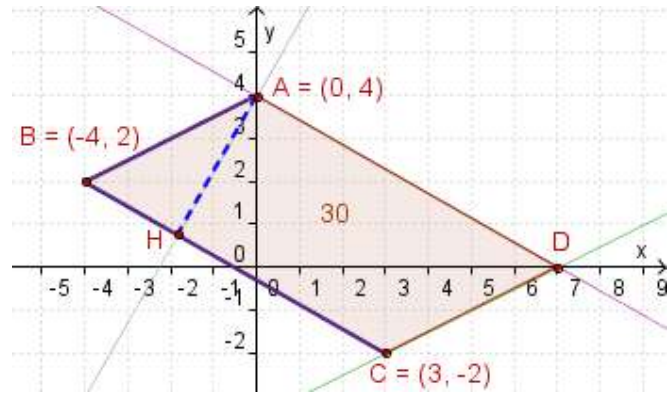


Prova di Matematica: **Piano cartesiano e retta**

1. I primi tre vertici di un parallelogramma sono  $A(0; 4)$ ,  $B(-4; 2)$ ,  $C(3; -2)$ . Verifica che il quarto vertice è  $D(7; 0)$  e determina l'area del parallelogramma.
2. Dato il fascio di rette di equazione  $kx + (5 - k)y + k - 3 = 0$ , determina la retta del fascio:
  - a. passante per l'origine;
  - b. perpendicolare all'asse  $x$ ;
  - c. parallela alla retta di equazione  $2x - 3y + 3 = 0$ ;
  - d. perpendicolare alla retta di equazione  $5x - 2y + 1 = 0$ ;
3. Martina e Daniele stanno progettando un viaggio in Spagna e vorrebbero noleggiare un'auto per i loro spostamenti. Stanno valutando le offerte di tre compagnie:
  - a. la compagnia A chiede una quota fissa di 10 euro più 20 euro per ogni giorno di noleggio;
  - b. la compagnia B chiede una quota fissa di 40 euro più 15 euro per ogni giorno di noleggio;
  - c. la compagnia C chiede 25 euro al giorno senza quote fisse;Stabilisci qual è la scelta più conveniente, in relazione al numero dei giorni di noleggio.

## Soluzione

1. I primi tre vertici di un parallelogramma sono  $A(0; 4)$ ,  $B(-4; 2)$ ,  $C(3; -2)$ . Verifica che il quarto vertice è  $D(7; 0)$  e determina l'area del parallelogramma.



### Soluzione

Determiniamo l'equazione della retta BC:

$$\frac{y - y_C}{y_B - y_C} = \frac{x - x_C}{x_B - x_C}; \quad \frac{y - (-2)}{2 - (-2)} = \frac{x - 3}{-4 - 3}; \quad \frac{y + 2}{4} = \frac{x - 3}{-7}; \quad -7(y + 2) = 4(x - 3);$$

$$-7y - 14 = 4x - 12; \quad -7y = 4x - 12 + 14; \quad 7y = -4x - 2; \quad y = -\frac{4}{7}x - \frac{2}{7}.$$

Il coefficiente angolare della retta BC è  $m_{BC} = -\frac{4}{7}$ .

Essendo la retta AD parallela alla retta BC  $\Rightarrow m_{AD} = m_{BC} = -\frac{4}{7}$ .

Determiniamo l'equazione della retta AD:

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A); \quad y - 4 = -\frac{4}{7}(x - 0); \quad y = -\frac{4}{7}x + 4.$$

Determiniamo l'equazione della retta AB:

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}; \quad \frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - (-4)}{0 - (-4)}; \quad \frac{y - 2}{2} = \frac{x + 4}{4}; \quad 4(y - 2) = 2(x + 4);$$

$$4y - 8 = 2x + 8; \quad 4y - 8 = 2x + 8; \quad 4y = 2x + 16; \quad y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Il coefficiente angolare della retta AB è  $m_{AB} = \frac{1}{2}$ .

Essendo la retta CD parallela alla retta AB  $\Rightarrow m_{CD} = m_{AB} = \frac{1}{2}$ .

Determiniamo l'equazione della retta CD:

$$y - y_C = m_{CD}(x - x_C); \quad y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 3); \quad y + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}; \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2; \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$

Determiniamo le coordinate del punto D:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ y = -\frac{4}{7}x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = -\frac{4}{7}x + 4 \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 49 = -8x + 56 \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} 15x = 105 \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(7; 0).$$

Determiniamo l'equazione della retta AH:

Essendo la retta AH perpendicolare alla retta BC  $\Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$ .

Pertanto, l'equazione della retta AH è:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A); \quad y - 4 = \frac{7}{4}(x - 0); \quad y = \frac{7}{4}x + 4.$$

Determiniamo le coordinate del punto  $D$  :

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{7}x - \frac{2}{7} \\ y = \frac{7}{4}x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{4}x + 4 = -\frac{4}{7}x - \frac{2}{7} \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} 49x + 112 = -16x - 8 \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} 65x = -120 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{24}{13} \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{24}{13} \\ y = \frac{7}{4}\left(-\frac{24}{13}\right) + 4 = -\frac{42}{13} + 4 = \frac{-42 + 52}{13} = \frac{10}{13} \end{cases} \quad \Rightarrow H\left(-\frac{24}{13}; \frac{10}{13}\right).$$

Determiniamo la misura dell'altezza  $AH$  :

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{\left(0 + \frac{24}{13}\right)^2 + \left(4 - \frac{10}{13}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2 + \left(\frac{42}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{169} + \frac{1764}{169}} = \\ &= \sqrt{\frac{2340}{169}} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{65}}{13} = \frac{6}{13}\sqrt{65}. \end{aligned}$$

Determiniamo la misura della base  $BC$  :

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-4 - 3)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}.$$

L'area del parallelogramma è .

$$S = \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \sqrt{65} \cdot \frac{6}{13}\sqrt{65} = \frac{6}{13} \cdot 65 = 30.$$

2. Dato il fascio di rette di equazione  $kx + (5 - k)y + k - 3 = 0$ , determina la retta del fascio:

- passante per l'origine;
- perpendicolare all'asse  $x$ ;
- parallela alla retta di equazione  $2x - 3y + 3 = 0$ ;
- perpendicolare alla retta di equazione  $5x - 2y + 1 = 0$ ;

Soluzione

a.  $k - 3 = 0$ ;  $k = 3$ ;  $\rightarrow 3x + 2y = 0$ .

b.  $5 - k = 0$ ;  $k = 5$ ;  $\rightarrow 5x + 2 = 0$ .

c.  $m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ ;  $m_f = m_r$ ;  $\frac{k}{k-5} = \frac{2}{3}$ ;  $3k = 2k - 10$ ;  $k = -10$  C.E.:  $k \neq 5$ .

$\rightarrow -10x + 15y - 13 = 0$ .

d.  $m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$ ;  $m_f = -\frac{1}{m_s}$ ;  $\frac{k}{k-5} = -\frac{2}{5}$ ;  $5k = -2k + 10$ ;  $7k = 10$ ;  $k = \frac{10}{7}$  C.E.:  $k \neq 5$ .

$\rightarrow \frac{10}{7}x + \left(5 - \frac{10}{7}\right)y + \frac{10}{7} - 3 = 0$ ;  $\frac{10}{7}x + \frac{25}{7}y - \frac{11}{7} = 0$ ;  $10x + 25y - 11 = 0$ .

3. Martina e Daniele stanno progettando un viaggio in Spagna e vorrebbero noleggiare un'auto per i loro spostamenti. Stanno valutando le offerte di tre compagnie:
- la compagnia A chiede una quota fissa di 10 euro più 20 euro per ogni giorno di noleggio;
  - la compagnia B chiede una quota fissa di 40 euro più 15 euro per ogni giorno di noleggio;
  - la compagnia C chiede 25 euro al giorno senza quote fisse;
- Stabilisci qual è la scelta più conveniente, in relazione al numero dei giorni di noleggio.

### Soluzione

Ponendo il numero dei giorni di noleggio =  $x$  e il costo del noleggio =  $y$ , con  $x, y \in \mathbb{N}$ , si ottengono le equazioni delle tre offerte:

a.  $y = 20x + 10$

b.  $y = 15x + 40$

c.  $y = 25x$

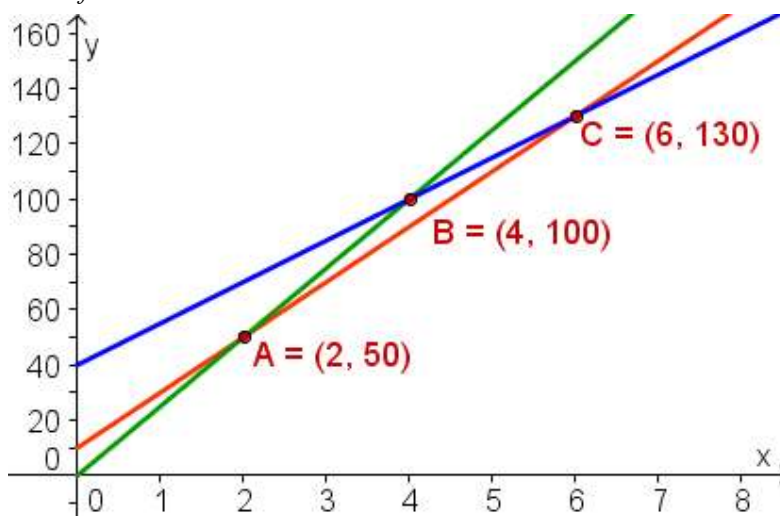
Determiniamo i punti di intersezione fra le tre funzioni lineari:

$$\begin{array}{l} a \\ b \end{array} \begin{cases} y = 20x + 10 \\ y = 15x + 40 \end{cases} \begin{cases} 20x + 10 = 15x + 40 \\ \text{-----} \\ 5x = 30 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 130 \end{cases} \Rightarrow A(6; 130)$$

$$\begin{array}{l} a \\ c \end{array} \begin{cases} y = 20x + 10 \\ y = 25x \end{cases} \begin{cases} 25x = 20x + 10 \\ \text{-----} \\ 5x = 10 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 50 \end{cases} \Rightarrow B(2; 50)$$

$$\begin{array}{l} b \\ c \end{array} \begin{cases} y = 15x + 40 \\ y = 25x \end{cases} \begin{cases} 25x = 15x + 40 \\ \text{-----} \\ 10x = 40 \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 100 \end{cases} \Rightarrow C(4; 100)$$

Tracciamo poi i grafici delle tre funzioni lineari:



Dall'analisi dei grafici si ottiene:

Per  $x < 2$  (per un giorno di noleggio) è più conveniente la compagnia c

Per  $2 < x < 6$  (per 3, 4, o 5 giorni) è più conveniente la compagnia a

Per  $x > 6$  (per più di 6 giorni di noleggio) è più conveniente la compagnia b

Per  $x = 2$  (per 2 giorni di noleggio) è indifferente scegliere la compagnia a o la compagnia c.

Per  $x = 6$  (per 6 giorni di noleggio) è indifferente scegliere la compagnia a o la compagnia b.