31 maggio 2017
Tempi: 60 minuti

Classe: *3 A Liceo Scientifico*
Prova di Matematica: *Coniche*

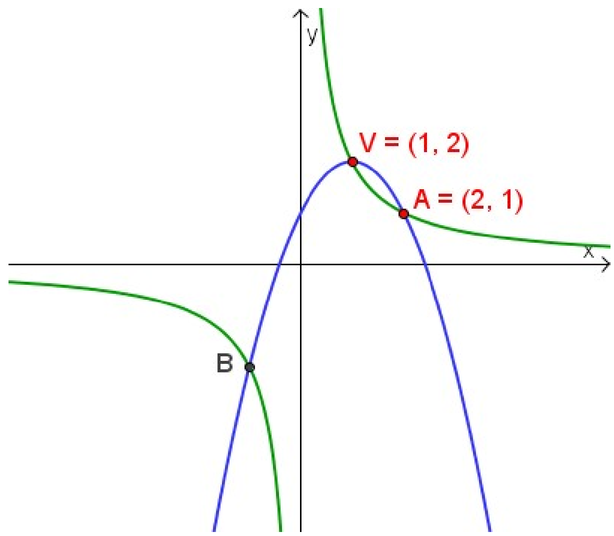
Quesito 1

Data la seguente famiglia di curve: $(k+1)x^2 + y^2 + (k+2)x - y + k = 0$, $k \in R$, determina per quali valori di k l'equazione rappresenta:

a. una parabola;
b. un'iperbole
c. un'iperbole equilatera
d. un'ellisse
e. una circonferenza
f. una retta
g. due rette incidenti.

Quesito 2

Determina le equazioni della parabola e dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti della figura. Ricava le coordinate dell'ulteriore punto B di intersezione tra le due curve e l'area del triangolo VAB. Trova l'equazione della circonferenza passante per i punti V, A e B, verifica che essa è tangente in A alla parabola.



Quesito 3

Rappresenta graficamente la conica di equazione: $4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$

Soluzione

Quesito 1

Data la seguente famiglia di curve: $(k+1)x^2 + y^2 + (k+2)x - y + k = 0\,, \;\; k \in R\,,$
determina per quali valori di k l'equazione rappresenta:

a. una parabola;
b. un'iperbole
c. un'iperbole equilatera
d. un'ellisse
e. una circonferenza
f. una retta
g. due rette incidenti.

<u>*Soluzione a*</u>

L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0\,.$

In questo caso i coefficienti sono:

$A = k+1 \qquad B = 1 \qquad C = k+2 \qquad D = -1 \qquad E = k \qquad F = 0\,.$

L'equazione data rappresenta una <u>parabola</u> con asse parallelo a uno degli assi cartesiani se uno dei due termini di secondo grado x^2 *o* y^2 *si annulla.*

Per $k = -1$ *si ottiene la parabola di equazione:* $y^2 + x - y - 1 = 0\,; \qquad x = -y^2 + y + 1\,.$

<u>*Soluzione b*</u>

L'equazione data rappresenta un'<u>iperbole</u> se i coefficienti dei termini di secondo grado sono discordi.

Cioè $A \cdot B < 0\,; \qquad (k+1)\cdot 1 < 0\,; \qquad k < -1$

<u>*Soluzione c*</u>

In particolare l'iperbole è <u>equilatera</u> se $A = -B\,,$ *cioè se* $k+1 = -1\,; \qquad k = -2$ *(accettabile)* .

Per $k = -2$ *si ottiene:*

$(-2+1)x^2 + y^2 + (-2+2)x - y - 2 = 0\;; \qquad -x^2 + y^2 - y - 2 = 0\;.$

<u>*Soluzione d*</u>

L'equazione $(k+1)x^2 + y^2 + (k+2)x - y + k = 0$ *rappresenta un'<u>ellisse</u> se i coefficienti dei termini di secondo grado sono concordi con la condizione di realtà* $\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E\,.$

I Caso $-\; A > 0 \;\; \wedge \;\; B > 0 \;\; \wedge \;\; \delta > 0$	**II Caso** $-\; A < 0 \;\; \wedge \;\; B < 0 \;\; \wedge \;\; \delta < 0$
$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k+1 > 0 \\ 1 > 0 \\ \frac{(k+2)^2}{4(k+1)} + \frac{(-1)^2}{4\cdot 1} - k > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -1 \\ \forall k \in R \\ \frac{(k+2)^2 + k + 1 - 4k(k+1)}{4(k+1)} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -1 \\ \frac{k^2 + 4 + 4k + k + 1 - 4k^2 - 4k}{4(k+1)} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -1 \\ \frac{-3k^2 + k + 5}{4(k+1)} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k > -1 \\ \frac{3k^2 - k - 5}{4(k+1)} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -1 \\ k < \frac{1-\sqrt{61}}{6} \;\; \vee \;\; -1 < k < \frac{1+\sqrt{61}}{6} \end{cases} \qquad -1 < k < \frac{1+\sqrt{61}}{6}\,.$	$\begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \\ \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k+1 < 0 \\ 1 < 0 \\ \frac{(k+2)^2}{4(k+1)} + \frac{(-1)^2}{4\cdot 1} - k < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k < -1 \\ \nexists\, k \in R \\ \frac{(k+2)^2}{4(k+1)} + \frac{(-1)^2}{4\cdot 1} - k < 0 \end{cases} \qquad \nexists\, k \in R$

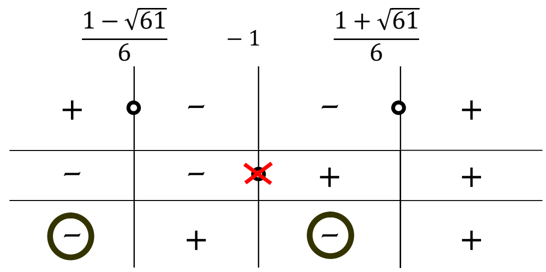
L'equazione data rappresenta un'ellisse se $-1 < k < \frac{1+\sqrt{61}}{6}$.

Calcoli

$$\frac{3k^2-k-5}{4(k+1)} < 0$$

$$\begin{array}{l|l} 3k^2-k-5>0 & k<\dfrac{1-\sqrt{61}}{6} \quad \vee \quad k>\dfrac{1+\sqrt{61}}{6} \\ 4(k+1)>0 & k>-1 \end{array}$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{61}}{6} \cong \begin{array}{l} k_1 = -1{,}14 \\ k_2 = +1{,}47 \end{array}$$



Soluzione e

L'equazione data rappresenta una circonferenza se $A = B$ *, cioè se* $k+1=1$ *;* $k=0$ *Soluzione accettabile.*

Soluzione f

Per nessun valore di k l'equazione rappresenta una retta, perché i termini di secondo grado non si annullano mai entrambi.

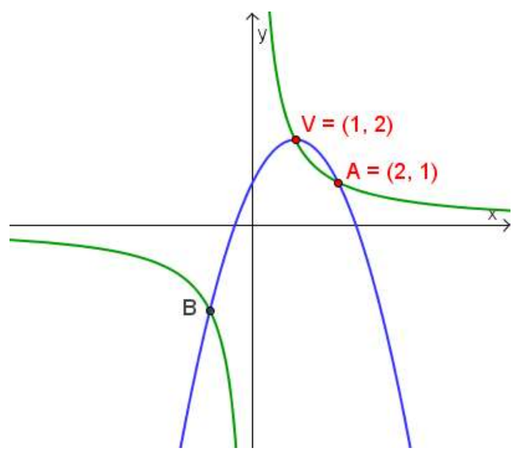
Soluzione g

Si ottengono due rette incidenti quando:

$$\begin{cases} A \cdot B < 0 \\ \dfrac{C^2}{4A} + \dfrac{D^2}{4B} - E = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (k+1)\cdot 1 < 0 \\ \dfrac{(k+2)^2}{4(k+1)} + \dfrac{(-1)^2}{4 \cdot 1} - k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k < -1 \\ k = \dfrac{1 \mp \sqrt{61}}{6} \end{cases} \qquad k = \frac{1-\sqrt{61}}{6}$$

Quesito 2

Determina le equazioni della parabola e dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti della figura. Ricava le coordinate dell'ulteriore punto B di intersezione tra le due curve e l'area del triangolo VAB. Trova l'equazione della circonferenza passante per i punti V, A e B, verifica che essa è tangente in A alla parabola e determina l'equazione della retta tangente comune.



Soluzione

L'iperbole equilatera ha equazione del tipo $xy = k$.

Imponiamo il passaggio per il punto $V(1\,;2)$.

$1 \cdot 2 = k\,; \qquad k = 2\,. \qquad \Longrightarrow \qquad xy = 2\,.$

La parabola ha equazione del tipo: $y = ax^2 + bx + c$

Imponiamo il passaggio per A e V e la conoscenza del vertice della parabola V .

$$\begin{cases} 2 = a+b+c \\ 1 = 4a+2b+c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=1 \\ b=-2a \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2a+c=2 \\ 4a-4a+c=1 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} -a+c=2 \\ c=1 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} -a+1=2 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = -x^2+2x+1 \ .$$

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+1 \\ xy=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-x^2+2x+1 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{x} = -x^2+2x+1 \\ \_ \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=-x^3+2x^2+x \\ \_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-2x^2-x+2=0 \\ \_ \end{cases}$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)$$

	1	-2	-1	$+2$
1		$+1$	-1	-2
	1	-1	-2	0

$$\begin{cases} x_1=1 \quad \vee \quad x_2=2 \quad \vee \quad x_3=-1 \\ \quad - \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} V(1\,;2) \\ A(2\,;1) \\ B(-1\,;-2) \end{matrix}$$

L'area del triangolo VAB è:

L'area del triangolo è:

$$S_{VAB}=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A-x_B & y_A-y_B \\ x_V-x_B & y_V-y_B \end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 1+1 & 2+2 \end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot[3\cdot4-2\cdot3\,]\right|=\ 3\ .$$

L'equazione della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si ottiene imponendo il passaggio per i tre punti A , B e V:

$$\begin{cases} 1+4+a+2b+c=0 \\ 4+1+2a+b+c=0 \\ 1+4-a-2b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2b+c=-5 \\ 2a+b+c=-5 \\ -a-2b+c=-5 \end{cases} \qquad 1^a+3^a \qquad \begin{cases} 2c=-10 \\ \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-5 \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ a+2b-5=-5 \\ 2a+b-5=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ a+2b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ a=-2b \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ a=-2b \\ -4b+b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-5 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza richiesta è $x^2+y^2-5=0$.

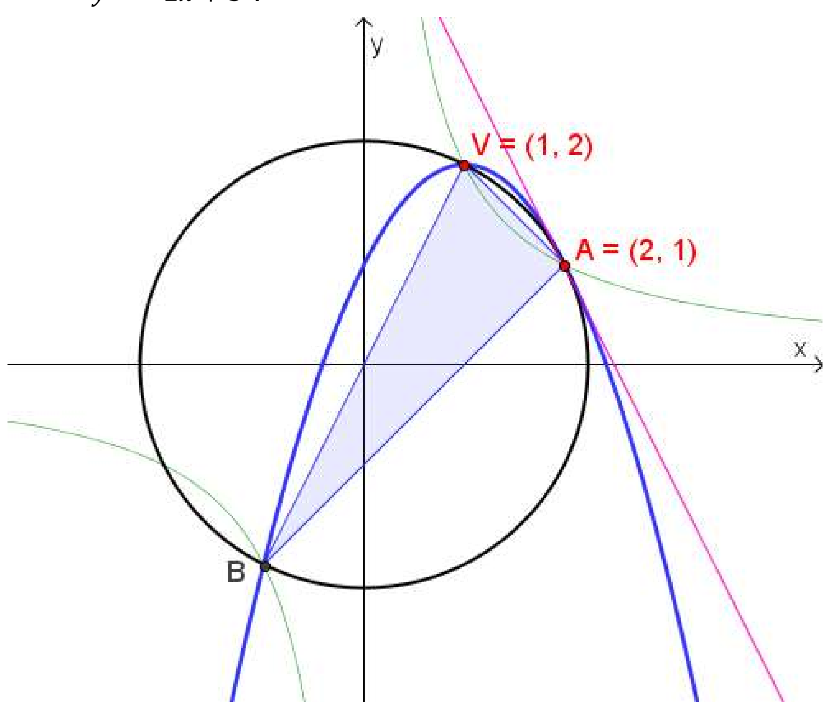
Verifichiamo che le due curve hanno la stessa retta tangente nel punto $A\ (2\,;1)$.

Utilizzando le formule di sdoppiamento, la retta tangente alla parabola è:

$$\frac{1+y}{2}=-2x+2\cdot\frac{2+x}{2}+1\ ; \qquad 1+y=-4x+4+2x+2\ ; \qquad y=-2x+5\ .$$

Utilizzando le formule di sdoppiamento, la retta tangente alla circonferenza è:

$$2\cdot x+1\cdot y-5=0\ ; \qquad y=-2x+5\ .$$



Quesito 3

Rappresenta graficamente la conica di equazione: $4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$

Soluzione

L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0$.

In questo caso i coefficienti sono:

$A = 4$ $\quad B = -9$ $\quad C = 8$ $\quad D = -72$ $\quad E = -464$ $\quad F = 0$.

Essendo $A \cdot B = 4 \cdot (-9) = -36 < 0 \quad \wedge$

$\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = \frac{64}{4\cdot 4} + \frac{5184}{4\cdot(-9)} + 464 = \frac{64}{16} + \frac{5184}{36} + 464 = \frac{576+20736+668}{144} > 0$

L'equazione rappresenta l'equazione di una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse delle x .

L'equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$ $\qquad 4(x^2 + 2x) - 9(y^2 + 8y) - 464 = 0$;

$4(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 + 8y + 16) - 464 = 4 - 144$; $\qquad 4(x + 1)^2 - 9(y + 4)^2 = 324$;

$\frac{(x+1)^2}{81} - \frac{(y+4)^2}{36} = 1$; $\quad$ *che è del tipo* $\quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

Si tratta di una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse x immagine dell'iperbole $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$ *nella traslazione di vettore* $\vec{v}\,(-1\,;\,-4)$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(\,p\,;\,q)$ *cioè* $O'(-1\,;\,-4)$.

I vertici reali hanno coordinate:

$V_1\,(p + a;\ q)$ $\quad V_2\,(p - a;\ q)$ $\quad$ *cioè* $\quad V_1\,(-1 + 9\ ;\ -4)$ $\quad V_2\,(-1 - 9\ ;\ -4)$

cioè $\quad V_1\,(8\ ;\ -4)$ $\quad V_2\,(-10\ ;\ -4)$

Gli asintoti hanno equazione:

$y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p)$;

$y + 4 = \pm\frac{2}{3}(x + 1)$;

Il suo grafico è di seguito rappresentato.