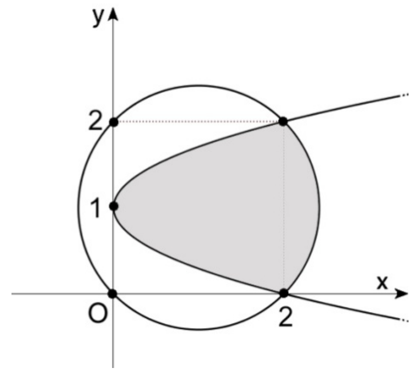
29 marzo 2017
Tempi: 60 minuti

Classe: *3 A Liceo Scientifico*
Prova di Matematica: *Circonferenza*

Quesito 1
Data la seguente famiglia di curve: $(k-1)x^2+y^2+kx-y+k-2=0\,,\ \ k\in R\,,$
determina per quali valori di k l'equazione rappresenta:
a. una parabola;
b. una retta;
c. una circonferenza;
Rappresenta graficamente le curve trovate.

Quesito 2
Scrivi le equazioni della circonferenza e della parabola disegnate in figura e calcola l'area della parte colorata.



Quesito 3
Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $O(0\,;\,0)$ e $A(0\,;3)$ e determinane l'asse centrale e l'asse radicale.
a. Trova l'equazione della circonferenza del fascio avente il centro C sulla retta equazione $x+y-1=0$.
b. Determina le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza condotte da O e A.
c. Detto B il punto comune alle rette tangenti trovate, calcola l'area del quadrilatero $OBAC$.

Soluzione

Quesito 1

Data la seguente famiglia di curve: $(k-1)x^2+y^2+kx-y+k-2=0\,,\ \ k\in R\,,$
determina per quali valori di *k* l'equazione rappresenta:

a. una parabola;
b. una retta;
c. una circonferenza;

Rappresenta graficamente le curve trovate.

Soluzione

Per $k=1$ *si ottiene la parabola di equazione:* $y^2+x-y+1-2=0\,;\qquad x=-y^2+y+1\,.$

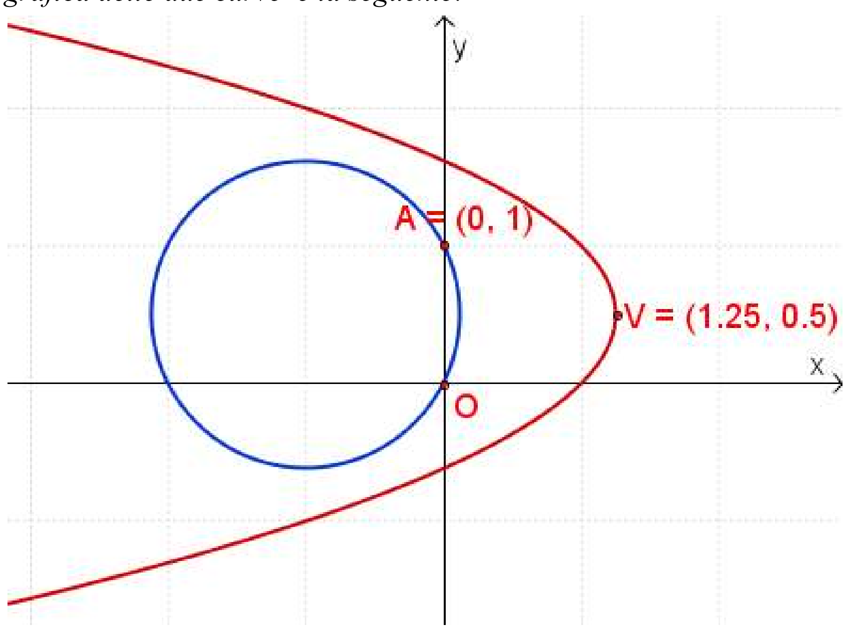
$$y_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}\qquad x_V=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}\qquad\Rightarrow\qquad V\left(\frac{5}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

Per nessun valore di k *l'equazione rappresenta una retta, perché i termini di secondo grado non si annullano entrambi.*

Per $k=2$ *si ottiene la circonferenza di equazione:* $x^2+y^2+2x-y=0\,.$

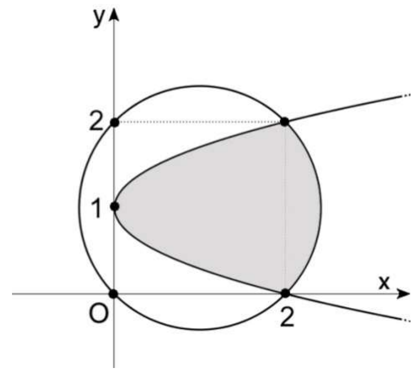
$$C\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\right)\qquad r=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-0}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

La rappresentazione grafica delle due curve è la seguente:



Quesito 2

Scrivi le equazioni della circonferenza e della parabola disegnate in figura e calcola l'area della parte colorata.



<u>Soluzione</u>

La circonferenza ha equazione : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Imponendo il passaggio per i punti A , B e C si ottiene:

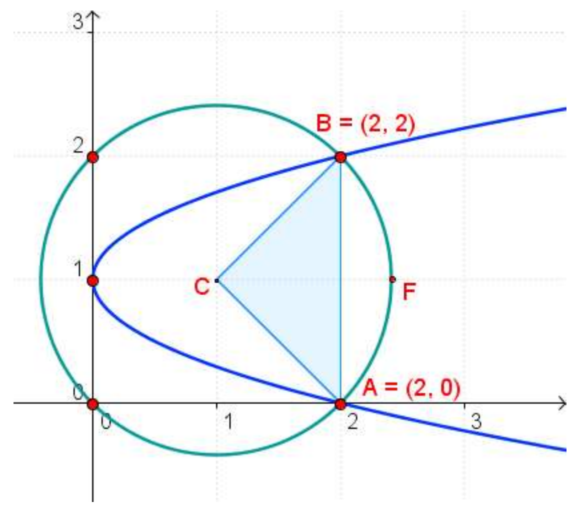
$$\begin{cases} 0^2 + 2^2 + a \cdot 0 + b \cdot 2 = 0 \\ 2^2 + 0^2 + a \cdot 2 + b \cdot 0 = 0 \\ 0^2 + 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 + 2b = 0 \\ 4 + 2a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \ .$$

La parabola ha l'asse parallelo all'asse x,
pertanto la sua equazione è del tipo: $x = ay^2 + by + c$.
Imponiamo il passaggio per i punti $V(0\,;1)$, $A(2\,;0)$ *e utilizziamo l'ordinata del vertice.*
Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2 = c \\ b = -2a \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ c = 2 \\ b = -2a \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 2a + 2 = 0 \\ --- \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} -a = -2 \\ --- \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +2 \\ b = -4 \\ c = +2 \end{cases}$$

La parabola richiesta ha equazione: $x = 2y^2 - 4y + 2$



L'area della parte colorata è data dalla somma dell'area del segmento parabolico ABV e del segmento circolare ad una base ABF .

L'area del segmento ad una base ABF è :

$$S_{ABF} = \frac{1}{4} \cdot S_{Cerchio} - S_{ABC} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \pi - 1 \, .$$

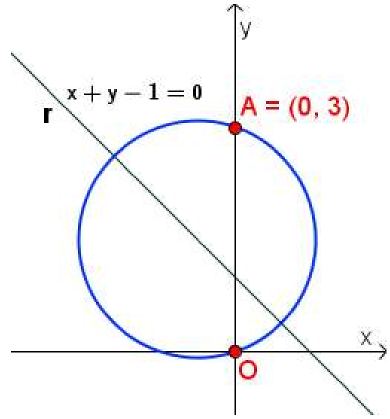
L'area del segmento parabolico ABV è :

$$S_{ABV} = \frac{2}{3} \cdot \overline{OA}^{\,2} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} .$$

L'area della parte colorata è :

$$S_{Colorata} = S_{ABF} + S_{ABV} = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{8}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3} \ .$$

Quesito 3



Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti O e A e determinane l'asse centrale e l'asse radicale.

a. Trova l'equazione della circonferenza del fascio rappresentata in figura a lato avente il centro *C* sulla retta *r* di equazione $x + y - 1 = 0$.
b. Determina le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza condotte da *O* e *A*.
c. Detto *B* il punto comune alle rette tangenti trovate, calcola l'area del quadrilatero *OBAC*.

<u>*Soluzione*</u>

Per trovare l'equazione del fascio di circonferenze imponiamo il passaggio per i punti O e A :

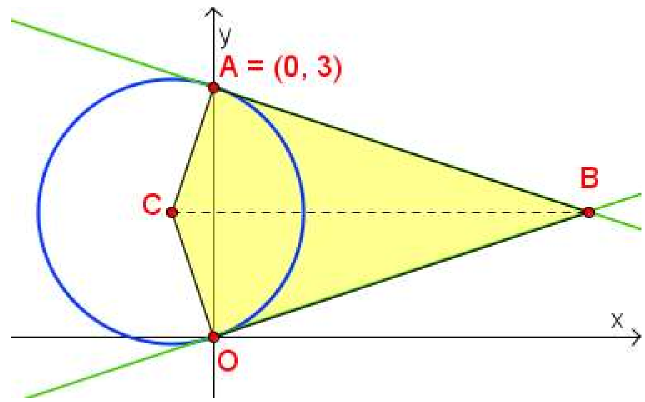
$\begin{cases} 0^2 + 0^2 + a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \\ 0^2 + 3^2 + a \cdot 0 + b \cdot 3 + c = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} c = 0 \\ 3b = -9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -3 \end{cases}$

Pertanto l'equazione del fascio di circonferenze richiesto è : $x^2 + y^2 + ax - 3y = 0$.

I centri delle infinite circonferenze del fascio hanno coordinate: $C\left(-\frac{a}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

Pertanto l'asse centrale ha equazione: $y = \frac{3}{2}$.

L'asse radicale è la retta passante per i punti base A e O
La sua equazione è $x = 0$.



L'equazione della circonferenza del fascio avente il centro C sulla retta r si ottiene imponendo che il centro appartenga alla retta r :

$x_C + y_C - 1 = 0\,;$ $\qquad -\frac{a}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 0\,;$

$-a + 3 - 2 = 0\,;$ $\qquad a = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + x - 3y = 0$ *con centro* $C\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$.

L'equazione della retta tangente alla circonferenza condotta dal punto O *si ottiene utilizzando le formule di sdoppiamento :*

$$\begin{cases} x^2 & \rightarrow & x_O \cdot x = 0 \cdot x = 0 \\ y^2 & \rightarrow & y_O \cdot y = 0 \cdot y = 0 \\ x & \rightarrow & \dfrac{x_O + x}{2} = \dfrac{0 + x}{2} \\ y & \rightarrow & \dfrac{y_O + y}{2} = \dfrac{0 + y}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 + \frac{0+x}{2} - 3\frac{0+y}{2} = 0\,; \qquad \frac{x}{2} - \frac{3}{2}y = 0\,; \qquad x - 3y = 0\,.$$

L'equazione della retta tangente alla circonferenza condotta dal punto A si ottiene utilizzando le formule di sdoppiamento :

$$\begin{cases} x^2 & \rightarrow & x_O \cdot x = 0 \cdot x = 0 \\ y^2 & \rightarrow & y_O \cdot y = 3\,y \\ x & \rightarrow & \dfrac{x_O + x}{2} = \dfrac{0 + x}{2} \\ y & \rightarrow & \dfrac{y_O + y}{2} = \dfrac{3 + y}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} 0^2 + 3y + \dfrac{0+x}{2} - 3\dfrac{3+y}{2} = 0\,; & 3y + \dfrac{x}{2} - 3\dfrac{3+y}{2} = 0\,; \\ 6y + x - 9 - 3y = 0\,; & x + 3y - 9 = 0\,. \end{array}$$

Il punto B ha coordinate: $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 3y \\ - \end{cases}$ $\quad \begin{cases} - \\ 3y + 3y - 9 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} - \\ 6y = 9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad B\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$

L'area del quadrilatero OBAC è : $\quad S_{OBAC} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AO} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \dfrac{15}{2}$.

Essendo $\overline{CB} = |x_B - x_C| = \left|\frac{9}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 5$ $\qquad$ *e* $\qquad \overline{OA} = |y_A - x_O| = |3 - 0| = 3$.